الفصل الثاني

البرمجة الخطية

Linear Programming

البرمجة الخطية

تعد البرمجة الخطية Linear Programming من أكثر الطرق الكمية المستخدمة في حل مسائل اتخاذ القرارات، وهي أسلوب رياضي يبحث عن أفضل الطرائق لاستخدام الموارد المتاحة بين الاستخدامات البديلة بما يحقق أفضل كفاية إنتاجية للمنظمات على مختلف أنواعها .

البرنامج الرياضي

هو نموذج رياضي يهدف إلى تحقيق أقصى MAXIMUM أو أدنى قيمة MINIMUM لدالة خطية تعرف باسم دالة الهدف OBJECTIVE FUNCTION , هذه الدالة مقيدة بمعادلات أو متراجحات تسمى قيوداً CONSTRAINTS.

بحيث تأخذ دالة الهدف وجميع القيود صيغة العلاقة الخطية , أي معادلات أو متراجحات من الدرجة الأولى .

مجالات تطبيق البرمجة الخطية

1- **الصناعة:** وضع جدول إنتاج وسياسة مخزون بأقل تكاليف ممكنة.

2- **التحليل المالي:** اختيار السياسة الاستثمارية التي تحقق أقصى عائد.

3- **التسويق:** تحديد المزيج الإعلاني الذي يحقق أعلى عائد.

4- **توزيع ونقل البضائع:** معرفة كمية البضاعة الواجب شحنها بأقل تكلفة ممكنة.

طرائق حل
البرمجة الخطية

أولا: طرائق عامة: -1- الطريقة البيانية .
-2- طريقة السمبلكس .
-3- الحاسب الآلي .

ثانيا: طرائق خاصة: -1- طريقة النقل .
-2- طريقة التخصيص .

أولا : الطريقة البيانية

- يقتصر استخدام هذه الطريقة على حالات خاصة كتلك التي لا يزيد فيها عدد المتغيرات عن ثلاثة، وذلك بسبب صعوبة تمثيل المشكلة بالرسم في حالة ازدياد عدد المتغيرات عن ثلاثة.

مقدمة في البرمجة الخطية

إن أهم المسائل التي تعالج بهذه الطريقة مايلي:

أ - مسائل تخطيط الإنتاج والطاقة الإنتاجية.

ب - مسائل المزيج ذو الكلفة الأقل للإنتاج.

ج - مسائل النقل والتخصيص وتوزيع المنتجات.

د - مسائل التوظيف وتنظيم المزيج التسويقي الأفضل.

ويتم معالجة تلك المسائل في ظل توافر الشروط التالية:

1- وجود هدف نهائي واحد ويأخذ شكلين هما:

-1- تعظيم النتائج في حالة الأرباح.

.2- تقليل النتائج في حالة التكاليف.

2- وجود قيود معينة على المتغيرات التي تتضمنها المشكلة، وتؤثر في تحقيق الهدف النهائي (قيود الموارد، الزمن، المساحات، ...الخ)

3- وجود علاقة تناسبية تتمثل بعلاقة خطية بين المتغيرات الموجودة في المسألة المراد حلها يمكن التعبير عنها بخط مستقيم.

4- خاصية الإيجابية أي قيم المتغيرات التي نحصل عليها بنتيجة الحل يجب أن تكون موجبة (تمثل وحدات حقيقية).

مشاكل الأمثلية Optimization problems

هي تلك المشاكل التي نبحث فيها عن أكبر أو أصغر قيمة لدالة تعتمد على متغير أو متغيرات، وتسمى هذه الدالة بدالة الهدف objective function. وتخضع هذه الدالة إلى قيود متمثلة في معادلات أو متباينات أو متراجحات، تربط وتحكم المتغيرات بعضها بالبعض.

مثال 1

أوجـد أكبر قيمة لدالة الهدف هـ = 5 $س_1$ + 3 $س_2$

طـبقـا للآتي :

$س_1 - س_2 \geq 3$

$س_2 \geq 4$

$س_1، س_2 \geq 0$

ونطلق على المتغيرات $س_1$، $س_2$ بمتغيرات القرار Decision Variables، وهي التـي نبحث عن قيمها لتعظيم دالة الهدف.

أما مشـاكل البرمجة الخطية Linear Programming Problems فهي المشاكل التي تتطلـب إيجاد اكبر أو أصغر قيمة لدالة هدف خطية طبقـا لقيود خطية. بمعنى أن العلاقة التي تربط بين المتغيرات بعضها ببعض هي علاقة خطية (متباينات أو معادلات من الدرجة الأولـى، الأس = ١).

صياغة نموذج البرمجة الخطية

لحل مسائل البرمجة الخطية يتم صياغة المسألة على شكل نموذج رياضي يعبر عن معطيات المسألة، ويتم بناء النموذج

- على الشكل التالي:

- تحديد دالة الهدف للمشكلة (تعظيم، تقليل)، وذلك بعد تحديد مساهمة كل متغير (مقدار الربح، مقدار التكاليف) في دالة الهدف.
- وتحديد العلاقة بين المتغيرات والهدف المراد تحقيقه،
- وكذلك بين المتغيرات والقيود على هذه المتغيرات.

أوجد أكبر (أقل) هـ = $ر_1 \times س_1 + ر_2 \times س_2 + \ldots + ر_ن \times س_ن$

طبقا للآتي :

$أ_{11} س_1 + أ_{21} س_2 + 000 + أ_{1ن} س_ن \geq ب_1$

$أ_{12} \times س_1 + أ_{22} \times س_2 + \ldots + أ_{2ن} \times س_ن \geq ب_2$

$أ_{م1} \times س_1 + أ_{م2} \times س_2 + 000 + أ_{من} \times س_ن \geq ب_م$

$س_1$، $س_2$، ...، $س_ر \leq$ صفر

مشكلة تحقيق أقصى ربح ممكن

- **مثال 1:** تنتج شركة صافولا نوعين من الزيوت النباتية ,زيت عافية وزيت العربي, ويتطلب إنتاج جالون زيت عافية ساعتي عمل للتعقيم وساعتي عمل للتعبئة, ويتطلب إنتاج جالون زيت العربي ساعة عمل للتعقيم وأربع ساعات للتعبئة.علماً بأن الحد الأقصى للساعات المتوفرة أسبوعياً في كل من قسم التعقيم والتعبئة هو: 18 , 48 ساعة على التوالي. كما أن الموزع لا يستطيع أن يبيع أكثر من 16 جالون زيت عافية لعدم وجود طلب كبير عليه , ولا يمكن بيع أقل من 4 جالون زيت العربي أسبوعياً .علما بأن ربح جالون زيت عافية 20 ريال, وربح جالون زيت العربي هو32 ريال.

	عافية	العربي	الحد الأقصى
التعقيم	2	1	18
التعبئة	2	4	48
الربح	20	32	

المطلوب : أ- أكتبي النموذج الرياضي ؟

ب- أوجدي الحل الأمثل باستخدام الرسم البياني ؟

خطوات تكوين النموذج الرياضي :

- 1- تحديد المتغيرات :
- زيت عافية = س1
- زيت العربي= س2

	عافية	العربي	الحد الأقصى
التعقيم	2	1	18
التعبئة	2	4	48
الربح	20	32	

2- تحديد دالة الهدف : هـ = 20س1+ 32 س2

3- القيود الهيكلية : بشرط أن :

2س1 + 1س2 ≤ 18

2س1 + 4س2 ≤ 48

س1 ≤ 16

س2 ≤ 4

4- القيود اللاسالبة : س1 , س2 ≥ صفر

النموذج الرياضي في الصيغة النهائية :

↑هـ = 20س1+ 32س2

بشرط أن :

2س1 + 1س2 ≥ 18

2س1 + 4س2 ≥ 48

س1 ≥ 16

س2 ≤ 4

س1 , س2 ≤ صفر

يمكن حله بالطرق التالية: بيانيا وبالسمبلكس وبالحاسب الآلي

الحل البياني :

2س1 + 1س2 = 18

س1= 0 ⟵ س2=0

س2=18 ⟵ 2س1= 18 ⟵ س1= 9

(18 , 0) ⟵ (0 , 9)

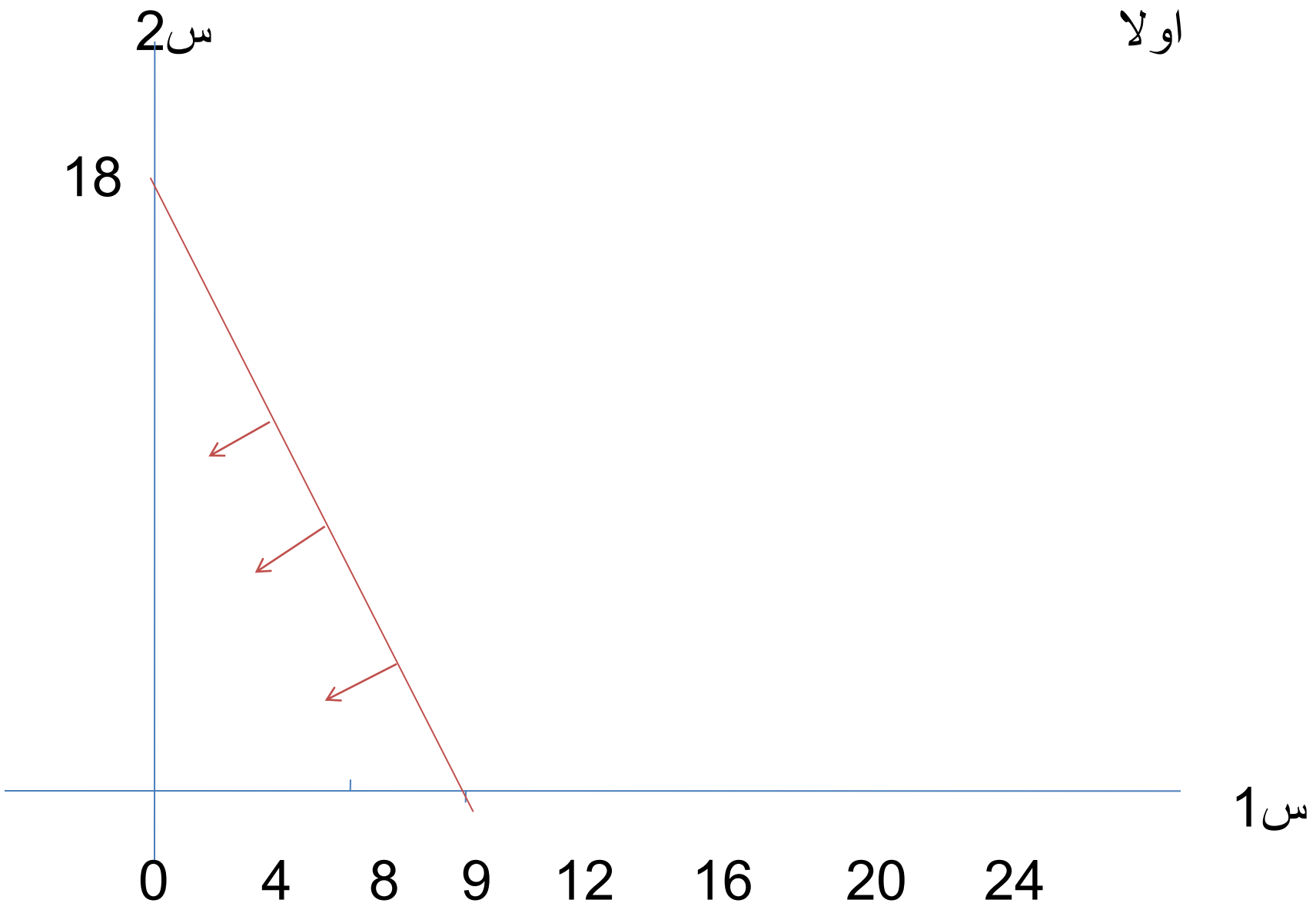
2س1 + 4س2 = 48

س1=0 ⟵ س2= 48 \ 4 = 12 ⟵ (12 , 0)

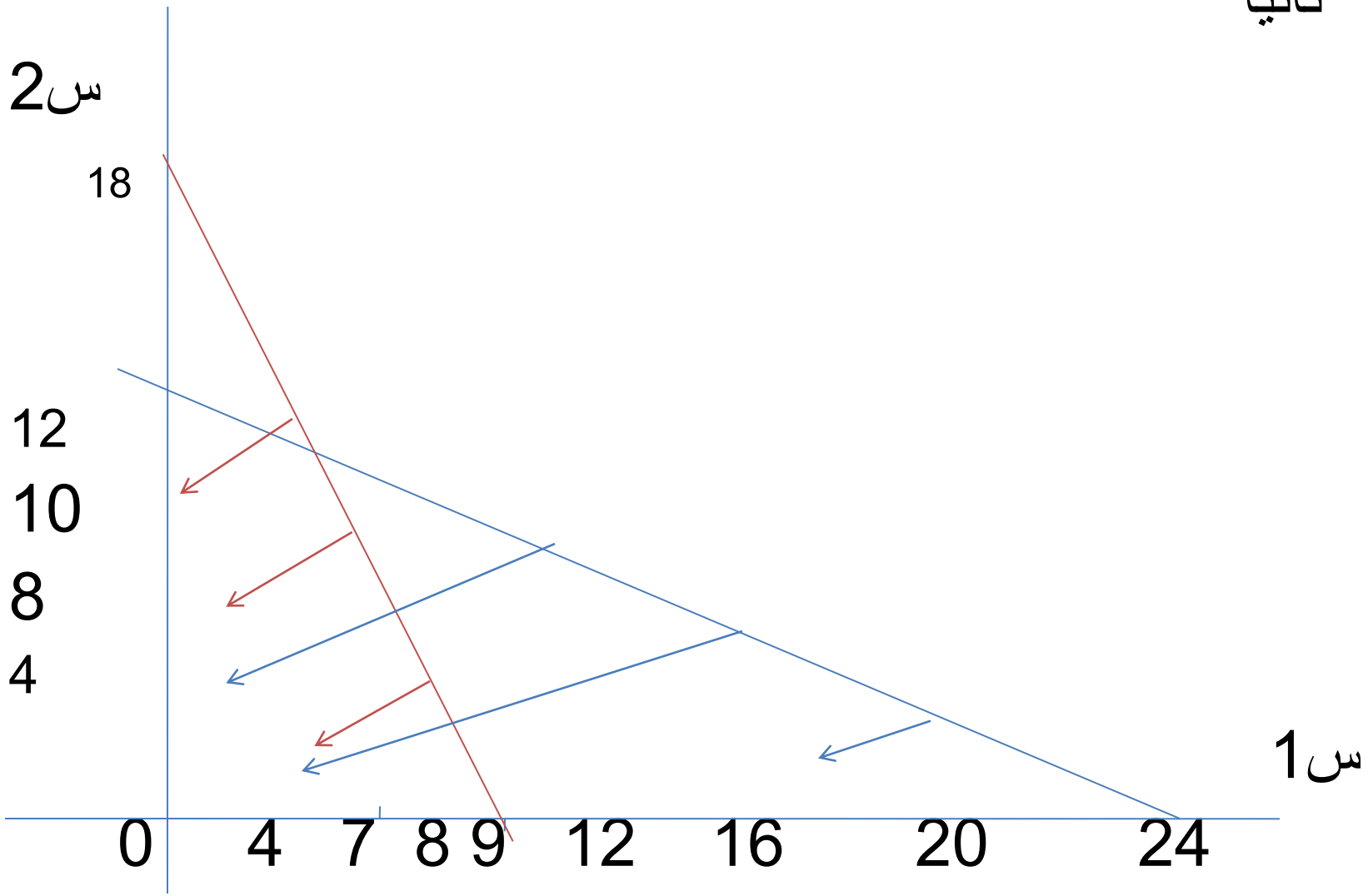
س2= 0 ⟵ س1= 48\2 = 24 ⟵ (0 , 24)

س1 = 16 ⟵ س2=0 ⟵ (0, 16)

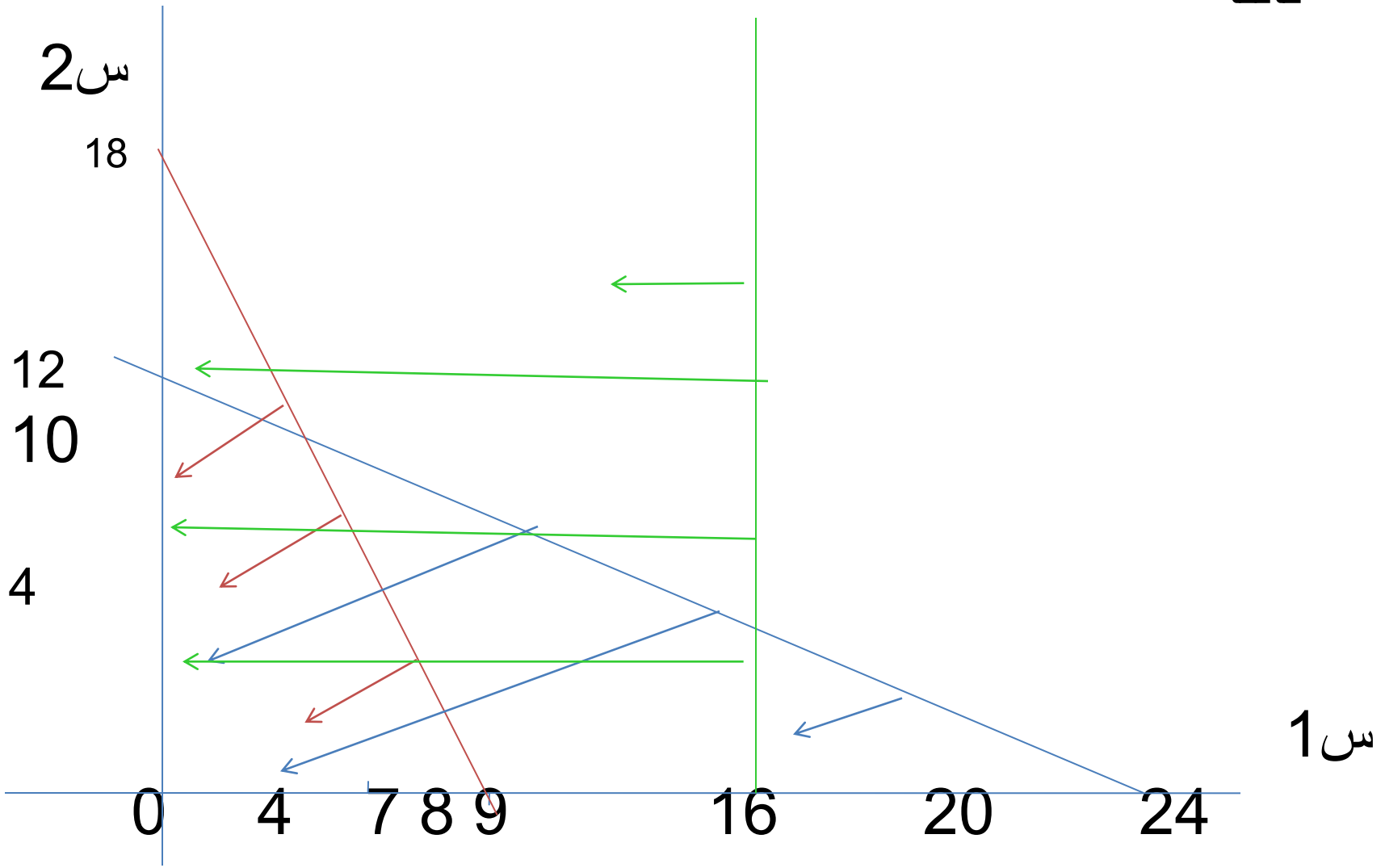
س2 = 4 ⟵ س1= 0 ⟵ (4 , 0)


اولا
س2
18
س1
0
4
8
9
12
16
20
24

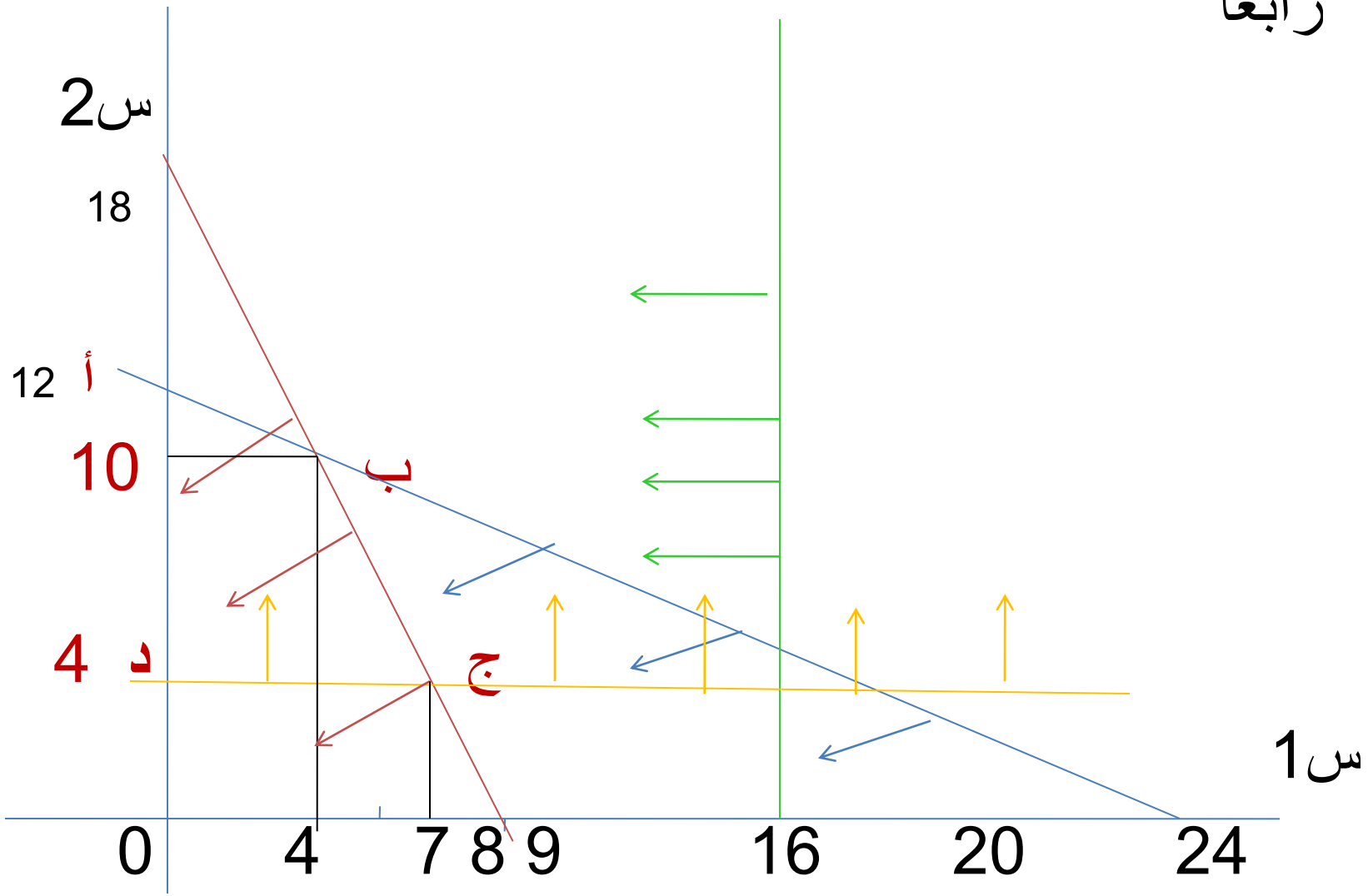
ثانيا



ثالثا



رابعا



نقاط الحل	دالة الهدف هـ = 20س1+ 32س2
أ (12,0)	20 (0) + 32 (12) = 384
ب (4 , 10)	20(4) + 32(10) = 400 الأعلى
ج (4 , 7)	20 (7) + 32 (4) = 268
د (4 , 0)	20 (0) + 32(4) = 128

الحل الأمثل = عدد النقاط القصوى = 4 (أ , ب , ج , د)

س1 = 4 جالون زيت عافية

س2 = 10 جالون زيت العربي

الربح = 400 ريال

رسم دالة الهدف

- الخطوة التي تلي تحديد منطقة الحلول الممكنة هي تحديد افضل حل ممكن والذي يحقق الهدف.
- الحل الأمثل لمشكلة البرمجة الخطية هو الحل الممكن الذي يحقق افضل قيمة لدالة الهدف.
- **الطريقة:**
- نختار بصفة عشوائية قيمة معينة تمثل الربح .
- ونحدد جميع النقاط التي تحقق هذا الربح.

- سنطبق ذلك على مثال 2

مثال رقم 2 :

مصنع جلود يرغب في إنتاج نوعين من حقائب اليد النسائية . وبعد دراسة جيدة لمراحل إنتاج هذه الحقائب اتضح أن إنتاج الحقيبة الواحدة يتطلب المراحل التالية :-1- قص وصبغ الجلود .2- الخياطة . 3- التشطيبات . 4- الفحص والتغليف. كما تمكن المدير من توفير المعلومات المعطاة في الجدول التالي عن الوقت اللازم بالساعة لإنتاج كل نوع في كل مرحلة , والطاقة الإنتاجية المتوفرة في المصنع محسوبة بالساعة أيضا .

	القص والصبغ	الخياطة	التشطيب	الفحص والتغليف	الربح
حقيبة عادية	$\frac{7}{10}$	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{10}$	10
حقيبة ممتازة	1	$\frac{5}{6}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{4}$	9
الطاقة المتوفرة	630	600	708	135	-

وبدراسة مواصفات وتكاليف الحقائب المطلوب إنتاجها,

قررت الإدارة سعر البيع , بحيث يكون ربح الحقيبة العادية 10 ريال

والحقيبة الممتازة 9 ريال .

والمشكلة المطلوب حلها : كم يجب أن ينتج المصنع من كل نوع,

بحيث يحقق أقصى ربح ممكن ؟

- **الخطوة الأولى:**
- تحديد المتغيرات:
- حقيبة عادية = س1
- حقيبة ممتازة = س2

- الحل:
- النموذج الرياضي:
- د = 10س1 + 9 س2
- بشرط أن:
- 10\7 س1+ 1س2 ≥ 630
- 2\1 س1 + 6\5 س2 ≥ 600
- 1س1 + 3\2 س2 ≥ 708
- 10\1 س1+ 4\1 س2 ≥ 135
- س1, س2 ≥ 0

- يمكن حله بالطرق التالية: بيانيا وبالسمبلكس وبالحاسب الآلي .

الحل البياني : **نقوم بتحويل المتراجحات الى معادلات**

$\frac{7}{10}$ س1 + 1س2 = 630

س1 = 0

س2 = 630 (0 , 630)

س2 = 0

$\frac{7}{10}$ س1 = 630

س1 = 630 x $\frac{10}{7}$ = $\frac{6300}{7}$

900 = (0 , 900)

$\frac{1}{2}$ س1 + $\frac{5}{6}$ س2 = 600

س1 = 0 س2 = 600 (0 , 720)

س2 = 600 x $\frac{6}{5}$ = $\frac{3600}{5}$ = 720

س2 = 0 س1 = 600 (0 , 1200)

س1 = 600 x $\frac{2}{1}$ = 1200

- س1 + 3\2 س2 = 708

س1= 0 ⟵ 2\3 س2 = 708

س2= 708 x 3\2 = 2124 \ 2 = 1062 ⟵ (1062 ,0)

س2=0 ⟵ س1= 708 ⟵ (0 , 708)

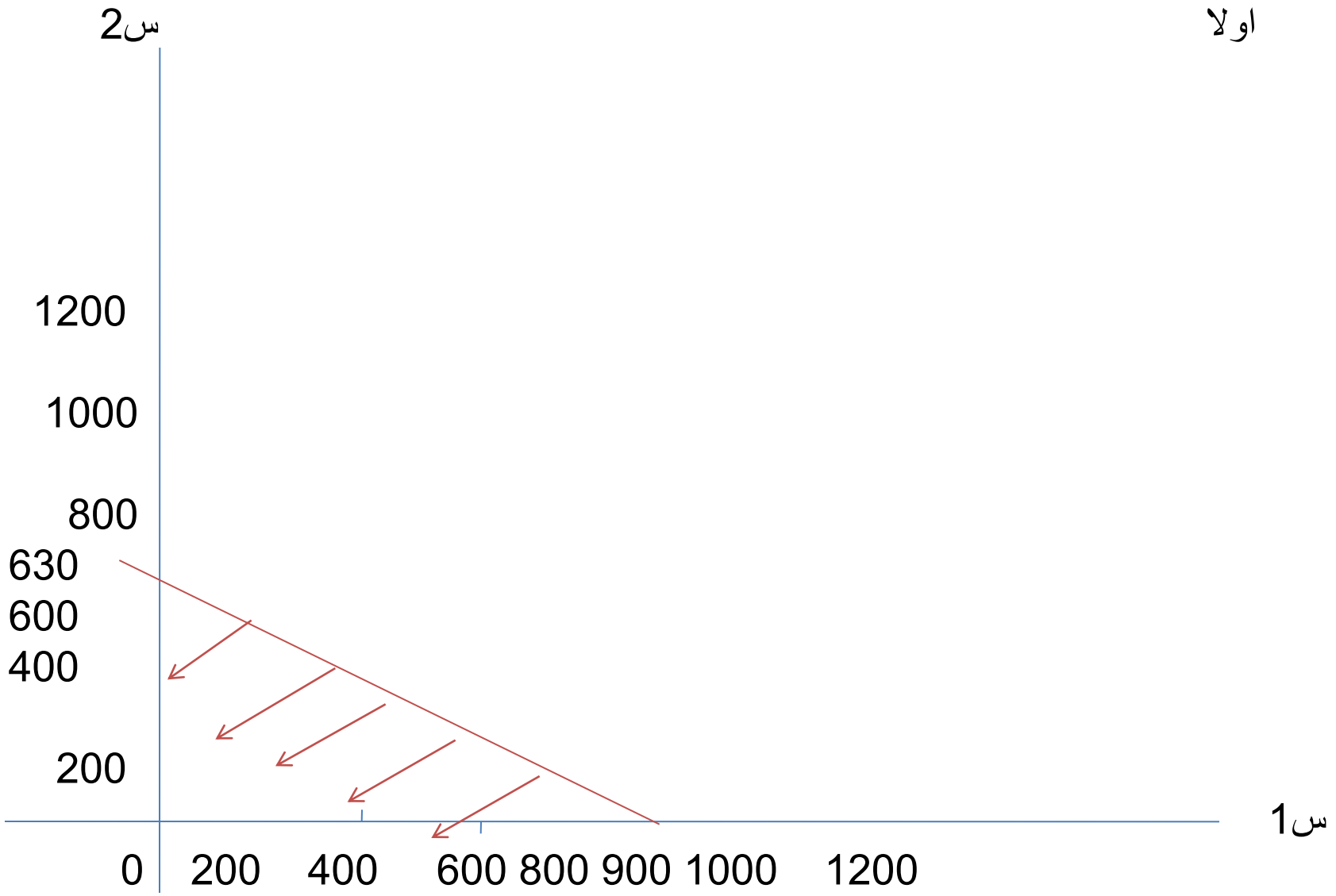
10\1 س1+ 4\1 س2 = 135

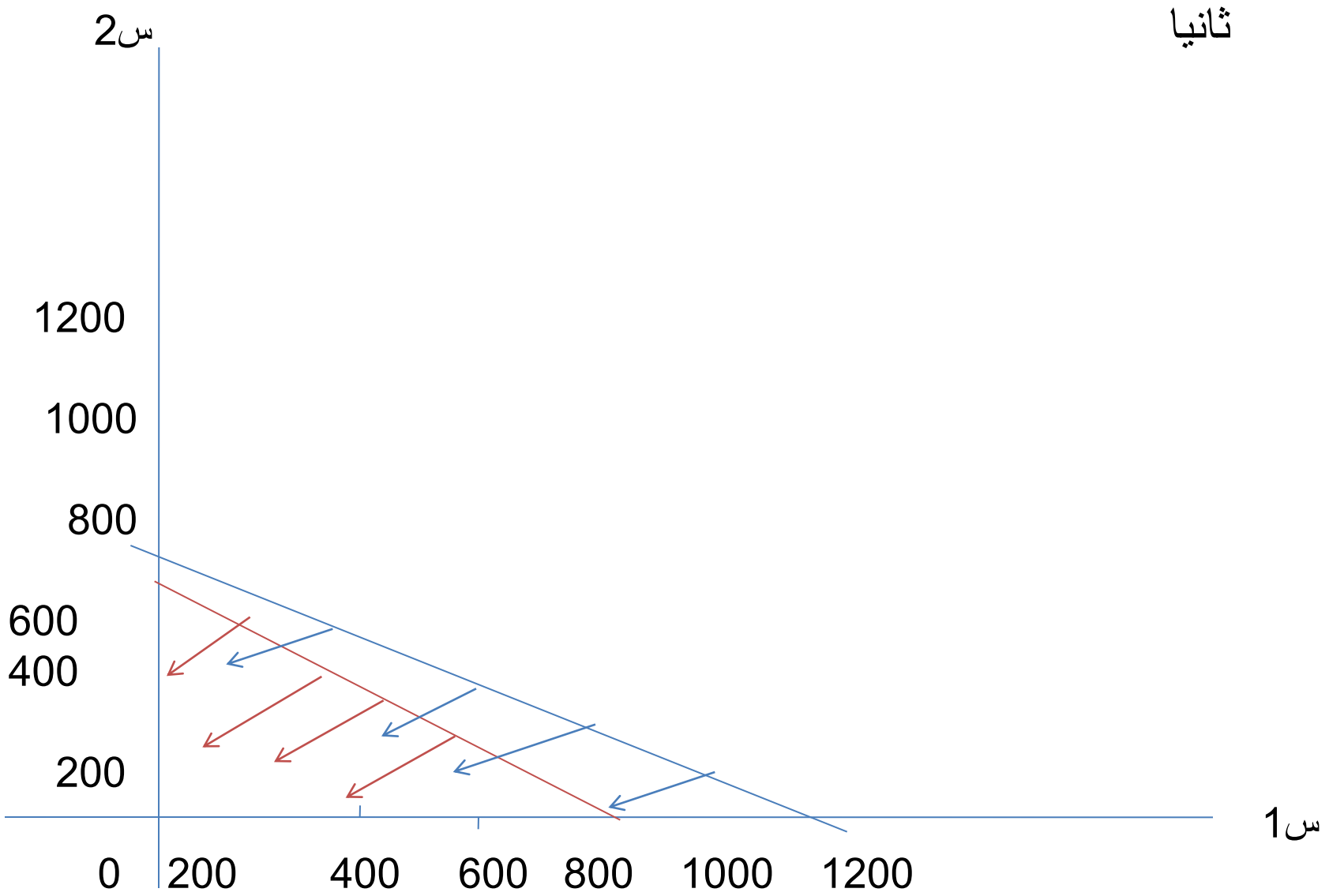
س1=0 ⟵ 4\1 س2 = 135

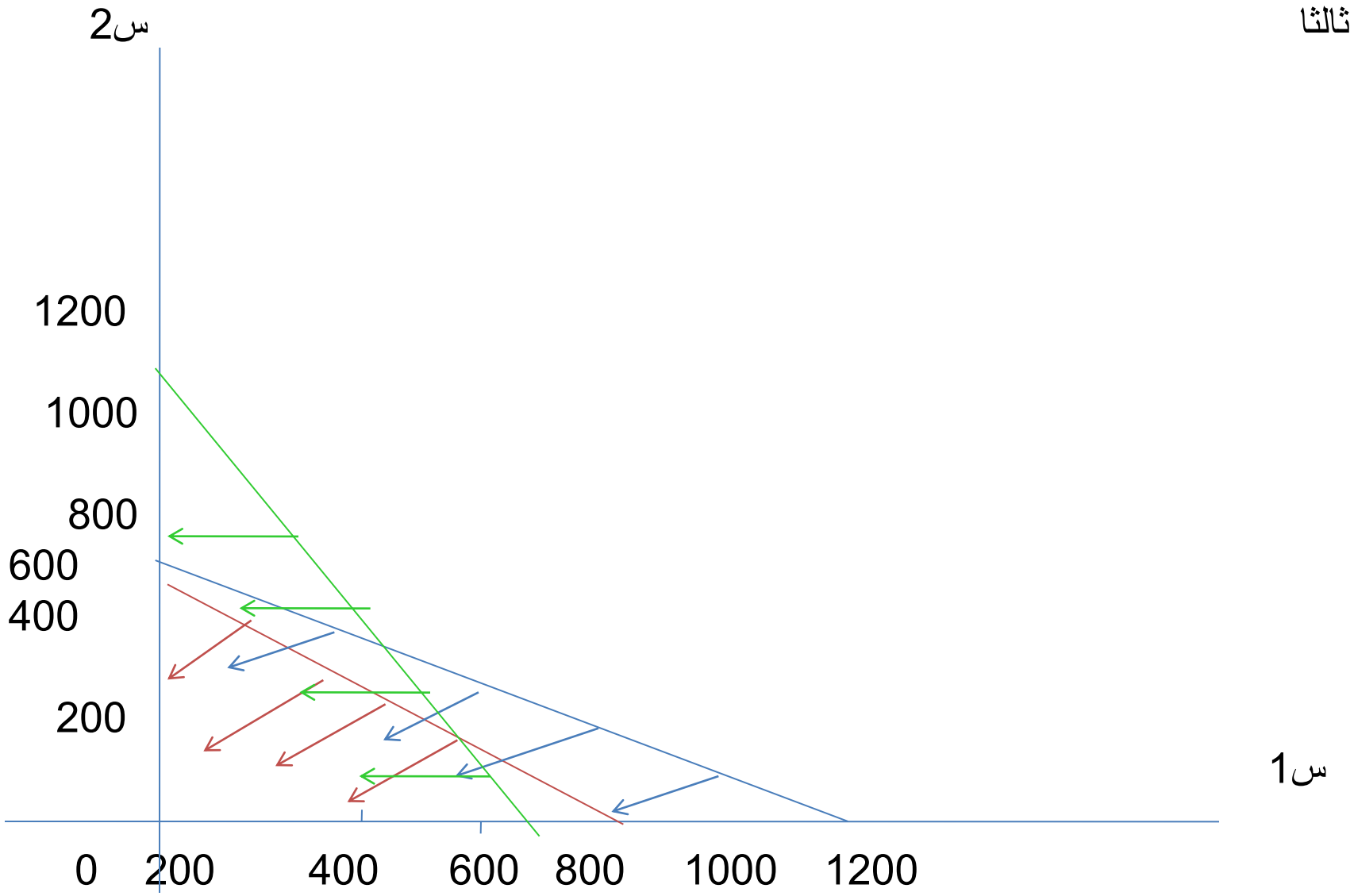
س2 = 135 x 4 = 540 ⟵ (540 ,0)

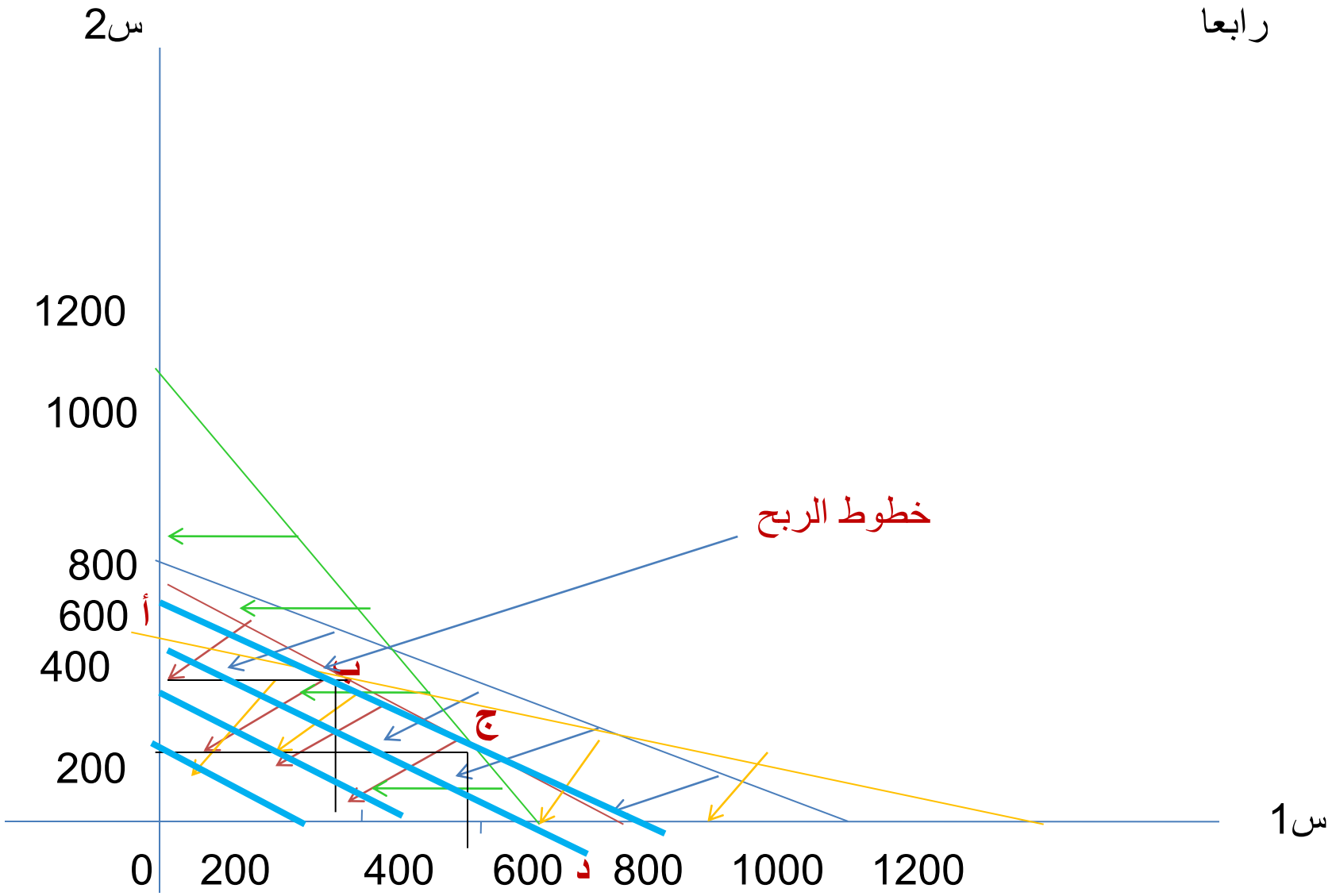
س2=0 ⟵ 10\1 س1 = 135

س1 = 135 x 10 = 1350 ⟵ (0 , 1350)


2س
اولا
1200
1000
800
630
600
400
200
1س
0
200
400
600
800
900
1000
1200


ثانيا
س2
1200
1000
800
600
400
200
0
200
400
600
800
1000
1200
س1


ثالثا
س2
1200
1000
800
600
400
200
س1
0
200
400
600
800
1000
1200


رابعا
س2
1200
1000
800
600
400
200
0
200
400
600
800
1000
1200
س1
خطوط الربح
أ
ب
ج
د

نقاط الحل	دالة الهدف هـ = 10س1 + 9 س2
أ (540,0)	10 (0) + 9 (540) = 4860
ب (400 , 250)	10 (250) + 9 (400) = 6100
ج (250 , 550)	10 (550) + 9 (250) = 7750 الاعلى
د (0 , 708)	10 (708) + 9 (0) = 7080

الحل الأمثل = عدد النقاط القصوى = 4 نقاط

س1 = 550 حقيبة عادية

س2 = 250 حقيبة ممتازة

الربح = 7750 ريال اقصى ربح

لرسم دالة الهدف:

- لنفرض ان الربح = 1800 ريال
- فتكون قيمة دالة الربح :
- د= 10 س1 + 9 س2 = 1800
- نوجد نقاط الدالة ونمثلها بيانيا
- (0 ,200) , (180, 0)
- نلاحظ ان خط 1800 يمثل جميع النقاط التي تحقق ربحا قدره 1800
- وحيث ان هدفنا هو تحقيق أعلى ربح ممكن فإننا نحصل على خط ربح اخر لو اخترنا ربحا اعلى مثل 5400
- ونحصل على خط ثالث لو اخترنا 7200

خصائص خطوط الربح:

1. جميعها متوازية.
2. كلما ارتفع الربح كلما ابتعد الخط المناظر له عن نقطة الأصل(الصفر).

طريقة الرسم:

1) نختار ربحا عشوائيا وليكن 2700 ونرسمه بيانيا.
2) نرسم عدة خطوط موازية له بقيم مختلفة للربح.
3) ونتحرك بعيدا عن نقطة الأصل حتى نصل لأبعد نقطة ركنية في منطقة الحلول الممكنة بحيث لو تحركنا منها خرجنا عن حدود منطقة الحلول الممكنة.

المتغيرات الراكدة (الوهمية)

SLACK VARIABLES

- ✓ هي كمية الطاقة غير المستخدمة لقيد من نوع ≤
- ✓ تعرف بالوفرة المصاحبة لذلك القيد .
- ✓ نرمز لها بالرمز [ك] ويضاف الى كل قيد حتى نحول المتراجحة إلى معادلة .
- ✓ نضع قيمة معاملها = صفر في صف دالة الهدف, حيث أنه لا تأثير لها على دالة الهدف . وتساوي 1 في بقية القيود.
- ✓ رياضيا : المتغير الراكد يمثل الفرق بين الطرف الأيمن والأيسر للمتراجحة .

$$5س_1 + 3س_2 \geq 40$$

$$5س_1 + 3س_2 + ك_1 = 40$$

$$15س_1 + 35س_2 \leq 40$$

$$15س_1 + 35س_2 - ف_1 = 40$$

المتغيرات الفائضة
SURPLUS VARIABLES

- ✓هي كمية الطاقة الفائضة والتي تصاحب القيد من نوع ≤
- ✓ نرمز لها بالرمز ف ويطرح من كل قيد حتى نحول المتراجحة إلى معادلة.
- ✓نضع قيمة معاملها = صفر في دالة الهدف حيث أنه لا تأثير لها على دالة الهدف.

القيد المحكم والقيد غير المحكم

BINDING

يعني أن الموارد الخاصة به قد استهلكت بأكملها بدون زيادة أو نقصان. وهنا تكون قيمة المتغير الراكد أوالفائض= صفراً

NOT BINDING

إذا كانت قيمة المتغير الراكد أو الفائض لا تساوي صفراً, فهذا يعني أن هناك موارد لم تستهلك (راكدة) أو أن هناك استهلاكا زائدا عن المطلوب(فائضا) ومن ثم يكون القيد غير محكم.

مثال :-

- القيد : 50 س1 + 100 س2 + ك1 = 1200000
- وبفرض أن قيم س1= 4000

س2 = 10000

- وبالتعويض نجد أن :-
- 50 (4000) + 100 (10000) + ك 1 = 1200000
- ك1 = 1200000- 200000 -1000000

= صفر إذا القيد محكم .