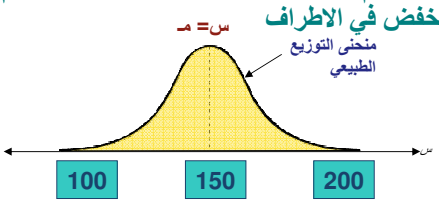
الباب الثاني

المنحنى المعتدل (التوزيع الطبيعى)

المنحنى المعتدل (التوزيع الطبيعي)

يعتبر التوزيع الطبيعي من أهم التوزيعات الاحتمالية في علم الاحصاء لأنه يمثل كثيراً من الظواهر التي تقابلنا في الحياة العمليه مثل الأطوال و الأوزان و الأعمار ودرجات الحرارة والدخول الشهريه ...

يتضح من رسمة المنحنى للتوزيع الطبيعي أن معظم الحالات تتجمع في المنتصف حول متوسط التوزيع وتقل تدريجيا كلما ابتعدنا نحو الطرفين كما في الشكل التالي وهذا ما يحدث طبيعيا في الحياة العملية فإننا نجد أن أغلب الأشخاص مثلا أطوالهم تتمركز حول متوسط الاطوال 150سم مثلا وهي قمة المنحنى تقريبا لذلك نجدها مرتفعة بينما قلة من الاشخاص يكون طولهم 200 سم مثلا او قلة من الاشخاص يكون طولهم 100 سم مثلا ولذلك يكون المنحنى منخفض في الاطراف



المنحنى المعتدل (التوزيع الطبيعي)

اذا رمزنا للطول بالرمز س ومن ملاحظتنا عند قياس الطول للأشخاص نجد أنه يختلف من شخص لآخر لذلك يسمى س متغيرا عشوائيا لأنه يتغير بين شخص وآخر

وبما أن س تتبع التوزيع الطبيعي من ملاحظتنا على الرسم السابق فهناك معلمتين مهمة للتوزيع الطبيعي هي متوسطه مـ و تباينه $ع^2$

ومنه نوجد الانحراف المعياري ع (بأخذ الجذر التربيعي)

المنحنى المعتدل (التوزيع الطبيعي)

❖ **خواص المنحنى المعتدل (الطبيعي):**

١- المنحنى الاحتمالي متماثل حول العمود الذي يمر بقمته أي عند س= مـ لذلك فإن هذا العمود يجزئ المنحنى الطبيعي إلى قسمين متماثلين في الشكل والمساحة.

٢- شكله يشبه الناقوس

٣-طرفا التوزيع تمتد إلى مالا نهاية

٤-المساحة تحت المنحنى تساوي الواحد (1)

٥- نلاحظ أن 99.7% من قيم المتغير س تقع في الفترة من (مـ - 3عـ ،مـ+ 3عـ)

وأن 95.5% من قيم المتغير س تقع في الفترة من (مـ -2عـ ،مـ+2عـ)

وأن 68% من قيم المتغير س تقع في الفترة من (مـ -عـ ،مـ+عـ)

المنحنى المعتدل (التوزيع الطبيعي)

❖ مثال ١:

إذا كان متوسط أطوال المجندين فى وحده عسكريه ما 70 بوصه بانحراف معيارى قدره 2 بوصه صف هذه البيانات مستخدمة القوانين في الخاصية الاخيرة من خواص المنحنى المعتدل؟

أن 99.7% من الحالات في الوحدة تتراوح أطوالهم بين (مـ - 3عـ ،مـ+ 3عـ)

$(2\times3+70,2\times3-70)$

$(6+70,6-70)$

$(76,64)$

وأن 95.5% من الحالات في الوحدة تتراوح أطوالهم بين (مـ -2عـ ،مـ+2عـ)

$(2\times2+70,2\times2-70)$

$(4+70,4-70)$

$(74,66)$

المنحنى المعتدل (التوزيع الطبيعي)

وأن 68% من الحالات في الوحدة تتراوح أطوالهم بين (مـ -عـ ،مـ + عـ)

$(2\times1+70,2\times1-70)$

$(2+70,2-70)$

$(72,68)$

المنحنى المعتدل (التوزيع الطبيعي)

مقدمة عن مفهوم الاحتمال (ح)

كثيرا ما نستخدم في حياتنا اليومية كلمة احتمال

فمثلا عندما نقول أن احتمال أن ينزل المطر اليوم **80%** لأن السماء ملبدة بالغيوم وكثيرا ما يهمل الطالب مذاكرة جزء من المنهج لأن احتمال ان يأتي منه سؤال **20%**وهكذا...

ويساعدنا التوزيع الطبيعي في ايجاد الاحتمالات عن طريق جداول التوزيع الطبيعي

وسنلاحظ ان الاحتمالات لابد أن تكون

١- قيمتها موجبة

٢- وأن لا تزيد عن الواحد

المنحنى المعتدل (التوزيع الطبيعي)

لاستخدام جداول التوزيع المعتدل(الطبيعي)

لإيجاد الاحتمالات هناك حالتين:

١- إذا كانت الدرجات هي الدرجات الخام س

نحول الدرجات الخام س الى ز بالتحويلة $ز = \frac{س - مـ}{عـ}$

٢- إذا كانت الدرجات هي الدرجات المعيارية ز

لا تحتاج تحويل

س = اية قيمة خام

ز = درجة ز المعيارية

مـ = متوسط التوزيع الطبيعي المعتدل

عـ = الانحراف المعياري للتوزيع الطبيعي المعتدل

المنحنى المعتدل (التوزيع الطبيعي)

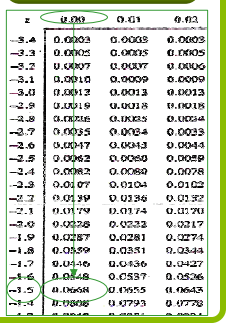
إذا وصلنا إلى درجات ز المعيارية سواء بالتحويلة او كانت معطاة مباشرة ننظر إلى شكل الاحتمال

أشكال الاحتمالات

أقل من	أكبر من	محصور بين قيمتين
ح (ز > أ)	ح (ز < أ) = 1 – ح (ز > أ)	ح (أ < ز < ب) = ح (ز > ب) – ح (ز > أ)

المنحنى المعتدل (التوزيع الطبيعي)

الجدول



١.أقل من 159 سم؟

إذا جعلنا س ترمز لأطوال النباتات، فإن س تكون متغيرا عشوائياً يتبع توزيعاً طبيعياً متوسطه 168 سم وانحرافه المعياري 6 سم.

$$ح(س < 159)$$

$$= ح(\frac{س - مـ}{عـ} < \frac{159 - 168}{6})$$

$$= ح(ز < -1.5) = 0.0668$$

إذا كانت أطوال مجموعه من النباتات تتبع توزيعاً طبيعياً متوسطه 168 سم و انحرافه المعياري 6 سم. أخذنا عشوائياً احد النباتات. ماهو احتمال أن يكون طوله:

المنحنى المعتدل (التوزيع الطبيعي)

٢. أكبر من 180 سم؟

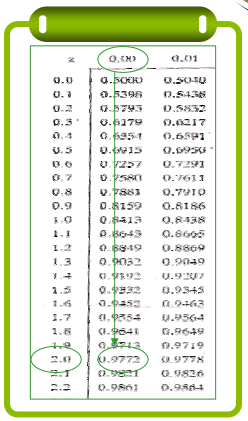
$$ح(س > 180)$$

$$= ح(\frac{س - مـ}{عـ} < \frac{180-168}{6})$$

$$= ح(ز < 2)$$

$$= 1 - ح(ز > 2)$$

$$= 1 - 0.9772 = 0.0228$$



z	0.00	0.01
0.0	0.5000	0.5040
0.1	0.5398	0.5438
0.2	0.5793	0.5832
0.3	0.6179	0.6217
0.4	0.6554	0.6591
0.5	0.6915	0.6950
0.6	0.7257	0.7291
0.7	0.7580	0.7611
0.8	0.7881	0.7910
0.9	0.8159	0.8186
1.0	0.8413	0.8438
1.1	0.8643	0.8665
1.2	0.8849	0.8869
1.3	0.9032	0.9049
1.4	0.9192	0.9207
1.5	0.9332	0.9345
1.6	0.9452	0.9463
1.7	0.9554	0.9564
1.8	0.9641	0.9649
1.9	0.9713	0.9719
2.0	0.9772	0.9778
2.1	0.9821	0.9826
2.2	0.9861	0.9864

المنحنى المعتدل (التوزيع الطبيعي)

٣. واقعاً في الفترة (165 , 174)؟

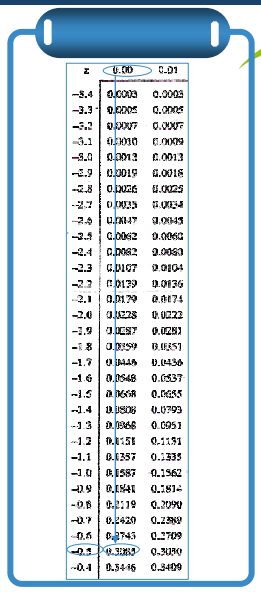
$$ح(165 < س < 174)$$

$$= ح(\frac{165-168}{6} \leq \frac{س - مـ}{عـ} \leq \frac{174-168}{6})$$

$$= ح(-0.5 < ز < 1)$$

$$= ح(ز < 1) - ح(ز < -0.5)$$

$$= 0.8413 - 0.3085 = 0.5328$$



z	0.00	0.01
-3.4	0.0003	0.0003
-3.3	0.0005	0.0005
-3.2	0.0007	0.0007
-3.1	0.0010	0.0009
-3.0	0.0013	0.0013
-2.9	0.0019	0.0018
-2.8	0.0026	0.0025
-2.7	0.0035	0.0034
-2.6	0.0047	0.0045
-2.5	0.0062	0.0060
-2.4	0.0082	0.0080
-2.3	0.0107	0.0104
-2.2	0.0139	0.0136
-2.1	0.0179	0.0174
-2.0	0.0228	0.0222
-1.9	0.0287	0.0281
-1.8	0.0359	0.0351
-1.7	0.0446	0.0436
-1.6	0.0548	0.0537
-1.5	0.0668	0.0655
-1.4	0.0808	0.0793
-1.3	0.0968	0.0951
-1.2	0.1151	0.1131
-1.1	0.1357	0.1335
-1.0	0.1587	0.1562
-0.9	0.1841	0.1814
-0.8	0.2119	0.2090
-0.7	0.2420	0.2389
-0.6	0.2743	0.2709
-0.5	0.3085	0.3050
-0.4	0.3446	0.3409

المنحنى المعتدل (التوزيع الطبيعي)

مثال :

إذا علمت أن الوقت الكافي الذي يحتاجه الطالب لإكمال الاختبار هو الدرجة الخام س ووجد أستاذ مادة الإحصاء الاجتماعي أن متوسط الوقت الكافي الذي يحتاجه الطلاب لإكمال اختبارهم النهائي 150دقيقة بانحراف معياري قدره30 دقيقة

أوجدي الآتي :

أ) ما احتمال أن يكمل الطلاب اختبارهم في أقل من 231.3 دقيقة؟

ب) ما احتمال أن يكمل الطلاب اختبارهم في أقل من195 دقيقة؟

ج) ما احتمال أن يكمل الطلاب اختبارهم في وقت أكبر من 90 دقيقة؟

د) احتمال ان يكمل الطلاب امتحانهم بين 60 و 225 دقيقة؟

المنحنى المعتدل (التوزيع الطبيعي)

أ) ما احتمال أن يكمل الطلاب اختبارهم في أقل من 231.3 دقيقة؟

مـ = 150 عـ = 30

نحول الدرجة الخام س = 231.3 إلى ز بالتحويلة ثم ننظر إلى شكل الاحتمال

$$ح(س < 195) = ح(\frac{س - مـ}{عـ} > \frac{150-231.3}{30}) = ح(ز < 2.71) = 0.9966$$

Standard Normal Table

z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
0.0	.5000	.5040	.5080	.5120	.5160	.5199	.5239	.5279	.5319	.5359
0.1	.5398	.5438	.5478	.5517	.5557	.5596	.5636	.5675	.5714	.5753
0.2	.5793	.5832	.5871	.5910	.5948	.5987	.6026	.6064	.6103	.6141
2.6	.9953	.9955	.9956	.9957	.9959	.9960	.9961	.9962	.9963	.9964
2.7	.9965	.9966	.9967	.9968	.9969	.9970	.9971	.9972	.9973	.9974
2.8	.9974	.9975	.9976	.9977	.9977	.9978	.9979	.9979	.9980	.9981

المنحنى المعتدل (التوزيع الطبيعي)

ب) ما احتمال أن يكمل الطلاب اختبارهم في أقل من 195 دقيقة؟

نحول الدرجة الخام س = 195 إلى ز بالتحويلة ثم ننظر إلى شكل الاحتمال

$$ح(س < 195) = ح(\frac{س - مـ}{عـ} < \frac{150-195}{30}) = ح(ز < 1.5) = 0.9332$$

ج) ما احتمال أن يكمل الطلاب اختبارهم في وقت أكبر من 90 دقيقة؟

نحول الدرجة الخام س = 90 إلى ز بالتحولية ثم ننظر إلى شكل الاحتمال

$$ح(س > 90) = ح(\frac{س - مـ}{عـ} < \frac{150-90}{30})$$

$$= ح(ز < -2)$$

$$= 1 - ح(ز < -2)$$

$$= 1 - 0.0228 = 0.9772$$

نلاحظ أن:
جميع الاحتمالات موجبة وأصغر من الواحد

المنحنى المعتدل (التوزيع الطبيعي)

د) احتمال ان يكمل الطلاب امتحانهم بين 60 و 225 دقيقة؟

نحول الدرجتين الخام 60 و 225 إلى الدرجات المعيارية ز ثم ننظر إلى شكل الاحتمال

$$ح(60 < س < 225)$$

$$= ح(\frac{150-60}{30} \le \frac{س - مـ}{عـ} \le \frac{150-225}{30})$$

$$= ح(-3 \le ز \le 2.5)$$

$$= ح(ز < 2.5) - ح(ز < -3)$$

$$= 0.9938 - 0.0013 = 0.9925$$

المنحنى المعتدل (التوزيع الطبيعي)

مثال:

مستخدمة جدول المنحنى المعتدل اوجدي الاحتمالات للدرجة المعيارية ز حسب الآتي:

لن نحتاج الى التحويل لان المعطى هو درجات ز المعيارية مباشرة ننظر إلى شكل الاحتمال

نلاحظ أن:
جميع الاحتمالات موجبة
وأصغر من الواحد

$$ح(ز < 1.54) = 0.9382$$

$$ح(ز < -3.17) = 0.0008$$

$$ح(ز > -0.4) = 1 - ح(ز < -0.4) = 1 - 0.3446 = 0.6554$$

z	.09	.08	.07	.06	.05	.04	.03	.02	.01	.00
−3.4	.0002	.0003	.0003	.0003	.0003	.0003	.0003	.0003	.0003	.0003
−0.5	.2776	.2810	.2843	.2877	.2912	.2946	.2981	.3015	.3050	.3085
−0.4	.3121	.3156	.3192	.3228	.3264	.3300	.3336	.3372	.3409	.3446
−0.3	.3483	.3520	.3557	.3594	.3632	.3669	.3707	.3745	.3783	.3821
−0.2	.3859	.3897	.3936	.3974	.4013	.4052	.4090	.4129	.4168	.4207

$$ح(1.17 < ز < 2.6) = ح(ز < 2.6) - ح(ز < 1.17) = 0.9953 - 0.8790 = 0.1163$$