إعداد وعرض: د. سـارة آل الشيخ

نماذج رياضية في علم الأوبئة

لقد بات من المؤكد لإنجاح أي عملية أن تتم حسب استراتيجيات مدروسة تغطي جميع الاحتمالات التي يمكن أن تطفو على السطح ، على المدى البعيد. فعلى سبيل المثال، حينما تعلن وزارة الصحة عن حملة تطعيم لمرضٍ معدٍ فإن هناك ترتيبات يتم بموجبها تنفيذ هذه الحملة، لتحقق الهدف المنشود. وحتى يكون القارئ على بينه من الأمر؛ فإننا نضع بين يديه العملية التي يتم من خلالها ترجمة آلية الإصابة بمرضٍ معدٍ رياضياً، والتي سيكون لها العون – بعد قدرة الله عز وجل- في اكتشاف النتيجة التي يترجح من خلالها تطور هذا المرض إلى وباء عام ، بالإضافة إلى الإسهام في عملية التحكم في هذا المرض في مراحله الأولى.


والموضوع في مجمله يتلخص في إيجاد عوامل الإصابة بالمرض بصورة حسابية والتي بدورها تفيد في حساب و دراسة مدى تأثير حملات التطعيم في انتشار المرض. وهذه الحسابات استندت على المفاهيم والفرضيات التالية:

المفاهيم:

1- R_o (The basic reproduction number) : وهو يمثل معدل عدد الأفراد الأصحاء الذين سيصابون بالمرض من فرد مصاب - بهذه المرض- في مجتمع غير محصن ضد هذا المرض المعدي.
وتتجلى أهمية حساب هذا العدد في تحديد ما إذا كانت هناك احتمالية لانتشار المرض المعدي في المجتمع أم لا. فعندما تكون $R_o < 1$ ستختفي العدوى تماما على المدى البعيد بشرط كون معدل الإصابة بالعدوى ثابت. أما إذا كانت $R_o > 1$ فإن هذه العدوى ستكون قادرة على الانتشار في هذا المجتمع. وكلما كانت قيمة R_o كبيرة؛ كان ذلك مؤشرا خطيرا إلى تطور المرض ليصل إلى مرحلة الوباء المنتشر في المجتمع.
والجدول التالي يبين قيم R_o لعدد من الأمراض المعدية المعروفة.

المرض	R_o
HIV مرض نقص المناعة (الايدز)	5-2
Diphtheria الدفتيريا	7-6
Measles الحصبة	18-12
Polio شلل الأطفال	7-5
SARS مرض سارز	5-2
Smallpox الجدري	7-6

2- S : وهو يمثل نسبة الأشخاص في المجتمع الذين ليس لديهم مناعة ضد هذا المرض. وقيمة S هذه تكون دائما عشرية تتراوح بين 0 و 1.


مرض الجدري

3- A : ويمثل المتوسط العمري الذي تحدث فيه الإصابة بالمرض في المجتمع

4- L : ويمثل المتوسط العمري المتوقع لأفراد المجتمع.

الفرضيات:

1- نفترض وجود مجتمع – لتوفر الرعاية الصحية، على سبيل المثال - تقل فيه نسبة وفيات المواليد، وأكثر أفراده يعيشون إلى متوسط عمري يقدر بـ L.
2- نفترض أيضا وجود اختلاط متجانس بين أفراد المجتمع

The endemic steady state

يكون المرض حالة متوطنة (The endemic steady state) عندما تكون العدوى بالمرض مستمرة بنفس المعدل بدون وجود أي مؤثر خارجي يسهم في عملية العدوى هذه. ويوضح ذلك، إذا أخذنا بريطانيا مثالا، نجد أن مرضا كالجدري المائي (العنقز) يعتبر من الأمراض المتوطنه بينما الملاريا ليست كذلك.
وكذلك لكي يكون المرض متوطن لابد أن ينقل كل شخص مصاب هذه العدوى إلى شخص واحد فقط. فإذا زاد العدد عن واحد فإن هذا يمثل مؤشرا إلى تحول المرض إلى وباء.

والآن إذا افترضنا وجود مجتمع جميع أفراده ليس لديهم مناعة ضد هذا المرض ؛ فإن هذا المرض يكون متوطن (endemic) إذا كان R_o لهذا المرض يساوي 1.
أما إذا كان بعض أفراد المجتمع لديه مناعة ضد هذا المرض فإن هذا المرض يكون متوطن (endemic) إذا كان:

$$R_o \times S = 1 \qquad (1)$$

وعليه إذا كان المرض متوطن فإن العلاقة التي تربط بين قيمتي R_o و S تكون عكسية (انظر معادلة (1))؛ فكلما زادت قيمة R_o في تناقصت قيمة S والعكس بالعكس.

و بافتراض أن جميع أفراد المجتمع يعيشون بمتوسط عمري يساوي L (دون تجاوز هذا المتوسط) وكان هذا المتوسط العمري الذي تحدث فيه الإصابة بالمرض في المجتمع يساوي A ، فإن الأفراد الأصغر سنا من عمر العدوى ليس لديهم مناعة ضد المرض بينما الأفراد الأكبر سنا من A فإنهم يكونون بين حالتين: إما أن لديهم مناعة ضد المرض أو ناقلين للعدوى. وفي هذه الحالة، فإن نسبة الأفراد الذين ليس لديهم مناعة ضد المرض تعطى بالمعادلة التالية:

$$S = \frac{A}{L} \qquad (2)$$

وعليه من (1) و(2):

$$R_o = \frac{L}{A} \qquad (3)$$

الرياضيات المتعلقة بحملات التطعيم:

الغرض من حملات التطعيم هي رفع نسبة الأشخاص الذين لديهم مناعة من مرض ما فوق مستوى معين يسمى (herd immunity) مما يؤدي إلى القضاء على المرض في ذلك المجتمع. و أفضل مثال على ذلك مرض الجدري.
لنرمز للمستوى (herd immunity) بالرمز q و بذلك تصبح S

$$S = 1 - q \qquad (4)$$

و ذلك لأن q تمثل نسبة الأشخاص الذين لديهم مناعة من المرض و مجموع S و q لا بد أن يساوي 1

من المعادلة رقم (1) نستنتج أنه لكي نحصل على حالة استقرار للمرض لا بد للمعادلات التالية من التحقق:

$$R_o \times (1-q) = 1 \qquad (5)$$

أو

$$q = 1 - \frac{1}{R_o} \qquad (6)$$

المستوى الأمثل للمناعة:

لقد حسبنا في معادلة رقم (6) المستوى الأمثل للمناعة و سنرمز له بالرمز q_c . فلكي نقضي على المرض لا بد ان تكون نسبة الأفراد المطعمين ضد المرض عند الولادة (أو قريبا من الولادة) تساوي على الأقل q_c .

$$q_c = 1 - \frac{1}{R_o}$$

ماذا يحصل عندما لا تتمكن حملة التطعيم من تجاوز المستوى الأمثل للمناعة؟

لنفترض أن في إحدى حملات التطعيم ضد مرضٍ كانت قيمة R_o له أكبر من 1؛ بلغت نسبة الأفراد المطعمين ضد المرض عند الولادة q ولكن هذه النسبة جاءت دون المستوى الأمثل المطلوب للقضاء على العدوى أي أن: $q < q_c$ (قد يحدث ذلك بسبب الإهمال أو عدم توفر تطعيمات كافية للجميع أو أسباب أخرى)
نتيجة لهذه النسبة تتغير قيمة R_o إلى R_q والذي تتحدد قيمته بالمعادلة التالية:

$$R_q = R_o(1-q) \qquad (7)$$

و سوف يؤدي انخفاض قيمة R_o إلى تغير قيمة A (متوسط العمر الذي تحدث فيه الإصابة بالمرض في المجتمع) إلى A_q بالنسبة للأشخاص الذين لم يحصلوا على التطعيم

$$R_q = \frac{L}{A_q}$$

وباستخدام المعادلة (7) مع المعادلة السابقة نحصل على العلاقة التالية:

$$A_q = \frac{L}{R_o(1-q)}$$

و بما أن

$$R_o = \frac{L}{A}$$

نستنتج أن

$$A_q = \frac{A}{(1-q)}$$

يتضح لدينا من المعادلات السابقة أن حملة التطعيم هذه ستؤدي إلى ارتفاع متوسط العمر الذي تحدث فيه الإصابة بالمرض. و من المهم جدا دراسة هذا التأثير عند القيام بحملات تطعيم ضد أمراض تزداد أعراضها شدة

مع تقدم عمر المصاب. فإن حملات التطعيم ضد هذه الأمراض إذا لم تتمكن من تعدي المستوى q_c سوف تؤدي إلى ارتفاع في نسبة الوفيات و مضاعفات المرض عنها فيما لو ترك المجتمع بدون تطعيم.

و لكن إذا نجحت حملة التطعيم في تخطي المستوى q_c فإن معدل انتشار المرض المعدى سوف يتضاءل تدريجيا إلى أن يتم القضاء على المرض نهائيا بإذن الله.