إعداد وعرض: سمية بتوة

ترجمة: آية الزرقا
سارة حدايدي

معادلة الفريسة والمفترس

المقدمة:

إن الله حين خلق هذه الحياة جعل لها ناموسا متقنا يحفظ لها توازنها لتسير عجلتها إلى أجل مسمى قدره الله.

والله حين وضع هذا الناموس وضعه بعدله وحكمته. فحين تتأمل حياة الغاب الذي يسيطر فيه القوى على الضعيف، والضعيف يصارع الأحداث من حوله ليبقى على حياته؛ في دائرة تعيد كرتها لتحفظ لكل طرف تواجده في الحياة، في صورة متوازنة بعيدا عن الخلل الذي يتسبب في كوارث بيئة ومعيشية يدركها الباحثون المهتمون بدراسة هذه النوعية من الصراعات؛ التي أصبحت من سنن الكون اللازمة والتي لم يعد ينكرها أحد إلا إذا تعدى الأمر إلى العنصر البشري.

في محاولة لترجمة هذا النوع من الصراع بصورة رياضية سنتعرض للحالة التي يفترس فيها حيوانا ما حيوانا آخر يعيش على مصدر غذاء آخر.

لنعتبر الحيوان المفترس هو (الثعلب) بينما يمثل (الأرنب) الفريسة التي تعيش على الأعشاب في الغابة.

تكوين نموذج لهذا الصراع:

سوف نرمز للتعداد السكاني للفريسة والمفترس بـــ x و y على التوالي في الوقت المدون بـــ t.

وحتى يتم إنشاء النموذج الذي يحكم هذا الصراع فإننا نقوم بالافتراضات التالية:

١. في حالة غياب المفترس أي $y=0$ فإن نمو الفريسة يتزايد بمعدل يتناسب مع x والتالي فإن:

$$\frac{dx}{dt} = ax \ , a > 0 \qquad \text{when} \quad y = 0$$

٢. في غياب الفريسة أي $x = 0$ فإن الحيوان المفترس سيموت وبالتالي فإن:

$$\frac{dy}{dt} = -cy \ , c > 0 \qquad \text{when} \quad x = 0$$

٣. في حالة تواجد كلا الطرفين فإن عدد المرات التي تحدث فيها مناوشة بين الحيوان المفترس والفريسة يتناسب مع حاصل ضرب أعداد الحيوان المفترس والحيوان الفريسة؛ وهذا يعني أن في كل مناوشة تحدث فإن أعداد الحيوان المفترس تتكاثر بينما تقل أعداد الحيوان الفريسة. أي أن معدل نمو الحيوان المفترس يتزايد بالحد bxy، في حين يتناقص معدل نمو الحيوان الفريسة بمقدار $-axy$؛ حيث a, b ثوابت موجبة. وكنتيجة لهذه الفروض فإننا نحصل على التالي:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= ax - axy = x(a - ay) \\ \frac{dy}{dt} &= -cy + bxy = y(-c + bx) \end{aligned} \qquad (1)$$

حيث c, a عددين موجبين يمثلان معدل نمو الفريسة ومعدل تناقص المفترس على التوالي، بينما يمثلان $a, b,$ المقدار الناتج عن التفاعل الحاصل بين النوعين.

وبعد كل هذه الفرضيات سيرتكز هدفنا حول تحديد الكيفية التي سيشكلها مسار الحلول للنظام (1) وذلك حين نختار قيم بدائية موجبة بدلالة الزمن لـــ y ,x . في البداية سوف حاول تحديد سلوك هذه الكيفية بصورة عامة باستخدام النظام (1) ومن ثم دراستها بصورة خاصة.

المعادلات العامة (الاعتيادية):

بإعادة صياغة النظام (1) على الشكل التالي:

$$X' = f(x) \qquad (2)$$

حيث

$$X' = \begin{bmatrix} \frac{dx}{dt} \\ \frac{dy}{dt} \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

و

$$f(x) = \begin{bmatrix} x(a-ay) \\ y(-c+bx) \end{bmatrix}$$

لإيجاد قيم y , x فإننا نساوي النظام السابق بالصفر كالتالي:

$$X' = f(x) = 0$$

وعليه فإن:

$$\begin{aligned} &x(a-ay)=0, \\ &y(-c+bx)=0. \qquad (3) \end{aligned}$$

ومن هاتين المعادلتين نحصل على:

$$x = 0 \text{ or } \quad y = \frac{a}{a}.$$

فإذا عوضنا عن $x = 0$ في (3) فإننا نحصل على $y = 0$.

أما إذا عوضنا عن $y = \frac{a}{a}$ في (3) فإننا نحصل على $x = \frac{c}{b}$.

ونستنتج من ذلك أن النقطتين $(0,0)$, $\left(\frac{c}{b},\frac{a}{a}\right)$ تمثلان نقطة توازن للنظام (1).

وبتفاضل $f(x)$ نحصل على التالي :

$$Df(x) = \begin{bmatrix} a-ay & -ax \\ by & -c+bx \end{bmatrix}$$

وبحساب قيمة نقطتي التوازن $(0,0),(\frac{c}{b},\frac{a}{a})$ تحت تأثير Df فإننا نحصل على القيم التالية:

$$A = Df\ (0,0)\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & -c \end{bmatrix}, \qquad B = Df\left(\frac{c}{b},\frac{a}{a}\right) = \begin{bmatrix} 0 & \frac{-ac}{b} \\ \frac{ab}{a} & 0 \end{bmatrix}$$

ومنها نستطيع حساب القيم الفعلية (Eigen Values) للـــمصفوفتين B, A والتي تساوي:

$$l1_A = a,\ \ l2_A = -c.$$
$$l_B = \pm\sqrt{cai}$$

نلاحظ أن القيم الفعلية عند نقطة التوازن (0,0) تمثل نقطة سرجية (saddle) للقطع الزائد وبالتالي فإنها غير مستقرة. أما القيم الفعلية عند النقطة $\left(\frac{c}{b},\frac{a}{a}\right)$ فهي أعداد تخيلية وبالتالي فإنه لا يمكننا تحديد طبيعة توازن هذه النقطة.

مثال:

ناقش حل النظام:

$$\frac{dx}{dt} = x - 0.5xy = x(1-0.5y)$$
$$\frac{dy}{dt} = -0.75 + 0.5xy = y(-0.75+0.25x)$$

حيث x و y أعداد موجبة.

الحل:

نكتب النظام كالتالي:

$$X' = f(x)$$

حيث أن:

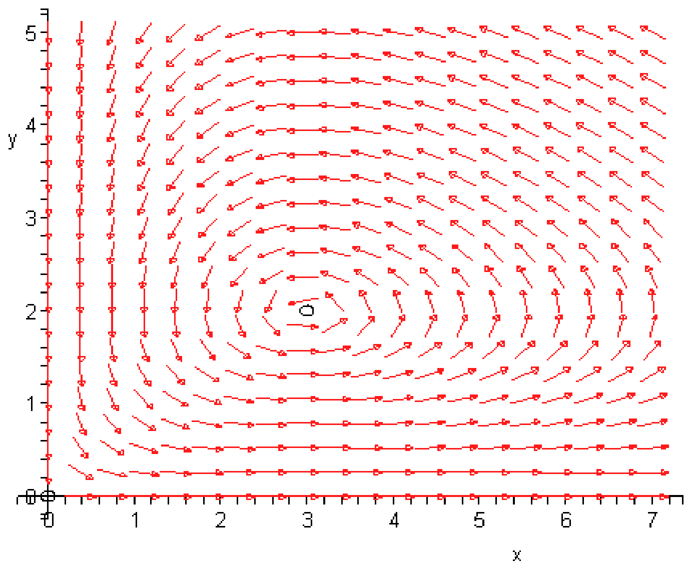
$$X' = \begin{bmatrix} \frac{dx}{dt} \\ \frac{dy}{dt} \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$f(x) = \begin{bmatrix} x(1-0.5y) \\ y(-0.75+0.25x) \end{bmatrix}$$

وباستخدام نفس الإستراتيجية السابقة فإن نقاط التوازن لهذا النظام تساوي:(0,0) و (3,2).

الشكل التالي يوضح نقاط التوازن والـــ Direction field للنظام.

Figure(1):Equilibrium points and direction field of the system (2)



مشتقة $f(x)$ هي:

$$Df(x) = \begin{bmatrix} 1-0.5y & 0.5x \\ 0.25y & -0.75+0.25x \end{bmatrix}$$

الآن نوجد: $Df(3,2)$, $Df(0,0)$

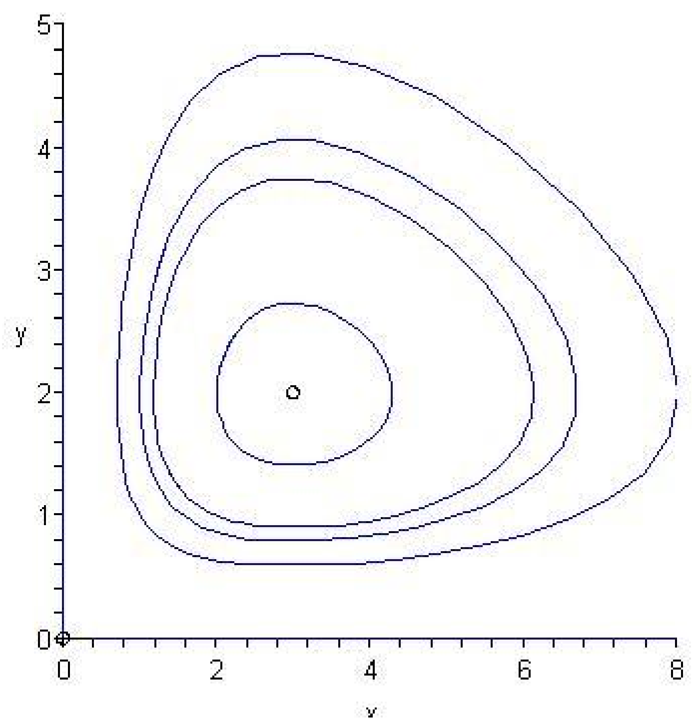
$$A = Df(0,0)\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -0.75 \end{bmatrix} \quad , \quad B = Df(3,2) = \begin{bmatrix} 0 & -1.5 \\ 0.5 & 0 \end{bmatrix}$$

الـــقيم الفعلية للـــمصفوفة A هي: $l_1 = 1 \quad , \; l_2 = -0.75$

ومنها نستنتج أن نقطة التوازن للقطع الزائد (0 ,0) هي نقطة غير مستقرة. أما القيم الفعلية للـــمصفوفة B تساوي: $l = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}i$ وهي أعداد تخيلية لا يمكننا عندها أن نحدد طبيعة نقطة التوازن (3,2).

الشكل التالي يوضح أن y, x هي دوال دورية بالنسبة للزمن وذلك لأن مسار الحلول بالنسبة لهما هي عبارة عن منحنيات مغلقة.

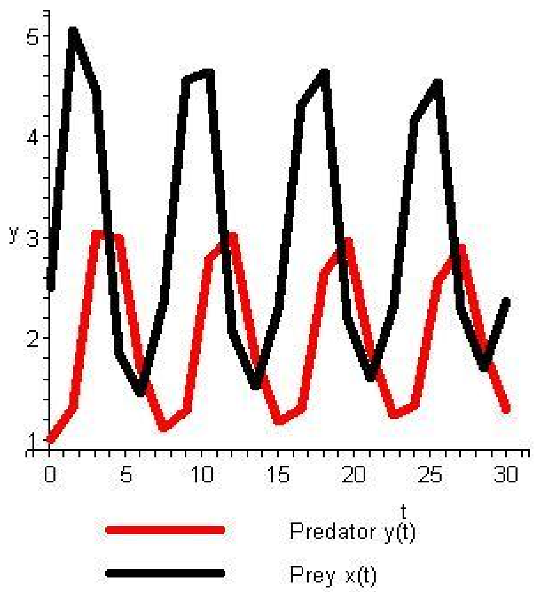
Figure(2): A phase portraite of system(2)



لبعض القيم الابتدائية للزمن فإن التغير في قيم y, x حول النقطة الحرجة يكاد يكون طفيفا وعليه فإن مسار الحلول يكاد يكون على هيئة القطع الناقص كما في الشكل السابق. في هذه الحالة فإن y, x تمثل دوال دورية في t وذلك لأن مسار الحلول كما لاحظنا سابقا هي منحنيات مغلقة. أما لبعض القيم الابتدائية الأخرى فإن

التذبذب في قيم y, x يكون أكثر وضوحا من خلال شكل مسار الحلول والذي يختلف تماما عن كونه قطع ناقص كما في الشكل التالي:

Figure(3): Variations of the predator and prey population with time t for system(2)



ونلاحظ أيضا من هذا الشكل أن التذبذب في التعداد السكاني للحيوان المفترس يعتمد بصورة كبيرة على التعداد السكاني للفريسة.

ففي الوضع الذي تكون فيه أعداد الثعالب والأرانب صغيرة نسبيا تنمو الأرانب لقلة الافتراسات. وحينما تكثر أعداد الأرانب تتكاثر الثعالب أيضا لوفرة الغذاء. وبعد ذلك ستقل أعداد الثعالب لندرة الغذاء وحينها سيرجع الوضع والصراع لحالته الأصلية.

المراجع:

1- Elementry Differential Equations and Boundry value Problems (Boyce. Diprima)

2- Ordinary Differential Equations (Richard K. Millar, Anthony N. Michel)