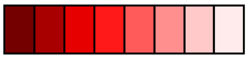
المجموعات الجزئية الضبابية

أول من حاول استنتاج ما يعرف بالمجموعة الجزئية الضبابية هو العالم لطفي زاده. وقبل أن نخوض في تفاصيل بعض ما يخص المجموعة الجزئية الضبابية؛ نحب أن نشير إلى أن جانب من حياة هذا العالم. فلطفي زاده هو عالم تركي من أصل إيراني. كان أبوه يعمل صحفيا وأمه طبيبة أطفال روسية. هاجر إلى إيران وعاش فيها فترة من عمرة ابتداءً من العاشرة وحتى تخرجه من قسم الهندسة من إحدى الجامعات الإيرانية. هاجر بعدها إلى الولايات المتحدة الأمريكية والتي أكمل فيها دراسته العليا لينال درجة الماجستير والدكتوراه.

وخلال هذه الفترة؛ لاحظ لطفي زاده أن الدالة المتميزة (characteristic function) تتعامل مع المجموعة$\{0,1\}$ حيث تساوي 1 إذا كان العنصر ينتمي إلى المجموعة وتساوي 0 إذا كان العنصر لا ينتمي إلى المجموعة. هذه الملاحظة أثارت تساؤله حول بقية القيم التي تقع بين 0 و 1. هل يمكن الاستفادة منها لإعادة صياغة تعريف الدالة المتميزة أو على الأقل تقديم تركيبة رياضية جديدة تتعامل مع جميع القيم بين 0 و 1 والتي حصرها في الفترة $[0,1]$؟

وبالفعل وضع بعض الفروض وحاول تعميمها على الفترة $[0,1]$ من خلال بعض الأمثلة الواقعية في الحياة؛ على سبيل المثال:

- المجموعة المكونة من الرجال ذوي الأطوال المختلفة، حيث كون مجموعة جديدة ترمز لكل طول بدرجة معينة محصورة بين 0 و 1.
- المجموعة المكونة من اللون الأحمر ودرجاته. 

كانت هذه المحاولات من لطفي زاده تمثل مفتاحا لباب فتح مصراعيه لكل مهتم وباحث في هذا المجال؛ فنتج عن ذلك التركيبة الرياضية لمفهوم المجموعة الضبابية.

فعند مقارنة هذه التركيبة بتعريف الدالة المتميزة نجد أن الدالة المتميزة دالة معرفة من المجموعة الشاملة u إلى مجموعة تتكون من $\{0,1\}$؛ بينما المجموعة الضبابية تعرف بدلالة الدالة المشاركة - والتي ويرمز لها بالدالة $m_A(x)$ - والتي تعرف على المجموعة الشاملة إلى الفترة المغلقة $[0,1]$ على النحو التالي:

لتكن u تمثل المجموعة الشاملة؛ فإن

$$m_A : u \to [0,1]$$

$$m_A(x) = \begin{cases} 0 & x \notin A \\ 1 & x \in A \\ (0,1) & \text{if } \; x \; \text{possible belongs to } A \text{ but not sure.} \end{cases}$$

لكل x ينتمي إلى المجموعة A.

أمثلة:

١- بفرض أن المجموعة الشاملة u تساوي

$$u = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$$

و

$$A = \{x_2, x_3, x_5\}$$

فإنه يمكننا تعريف المجموعة الضبابية كالتالي:

$$A_m = \{(x_1,0),(x_2,1),(x_3,1),(x_4,0),(x_5,1)\}$$

٢- بفرض أن المجموعة الشاملة تساوي مجموعة الأعداد الطبيعية N والدالة المشاركة تعبر عن أصغر عدد طبيعي فإن المجموعة الضبابية يمكن تعريفها كالتالي:

$$A_m = \{(0,1),(2,0.6),(3,0.4),(4,0.2),(5,0),(6,0),.....\}$$

بعض العمليات البسيطة على المجموعات الجزئية الضبابية:

لتكن A_m و B_m تمثلان مجموعتين جزئيتين ضبابيتين و u تعر عن المجموعة الشاملة فإن الخواص التالية دائما صحيحة:

١- $A_m \subseteq B_m$ إذا وإذا فقط

$$m_{A_m}(x) \le m_{B_m}(x)$$

لكل x في u .

٢- A_m مكملة للمجموعة B_m إذا وإذا فقط

$$m_{Bm}(x) = 1 - m_{Am}(x)$$

لكل x في u .

٣- $A_m = \overline{\overline{A}}_m$.

٤- يعرف التقاطع بين المجموعتين A_m و B_m على النحو التالي:

$$m_{A_m \cap B_m}(x) = \min(m_{A_m}(x), m_{B_m}(x))$$

لكل x في u .

٥- يعرف الاتحاد بين المجموعتين A_m و B_m على النحو التالي:

$$m_{A_m \cup B_m}(x) = \max(m_{A_m}(x), m_{B_m}(x))$$

لكل x في u .

٦- $A_m - B_m = A_m \cap \overline{B}_m$ ، لكل x في u .

٧- $m_u(x) = 1$ ، $m_j(x) = 0,$ لكل x في u .

وعلى الرغم من أن كل الخواص السابقة يمكن تعميمها على أي مجموعة إلا أن هذا لا يعطينا ضمانا على أنه ما يتحقق على المجموعات الأخرى يمكن تحقيقه على المجموعات الضبابية.

فعلى سبيل المثال لا الحصر؛ إذا كانت $E=\{x_1,x_2,x_3\}$ فإن مجموعة القوى التي تمثل جميع المجموعات الجزئية تعطى كالتالي:

$$P(E)=\{f,\{x_1\},\{x_2\},\{x_1,x_2\},\{x_1,x_3\},\{x_2,x_3\},E\}$$

و

$$|P(E)|=2^3$$

ولكن حين يأتي الكلام على المجموعات الضبابية؛ فإن الأمر يختلف تماما، خذ على سبيل المثال:

$$E=\{x_1,x_2\},\quad m_A(x)=\{0,\frac{1}{2},1\}$$

فإن

$$P(E)=\{\{(x_1,0),(x_2,0)\},\{(x_1,0),(x_2,0.5)\},\{(x_1,0.5),(x_2,0)\},$$
$$\{(x_1,0.5),(x_2,0.5)\},\{(x_1,0),(x_2,1)\},\{(x_1,1),(x_2,0)\},\{(x_1,1),(x_2,0.5)\}$$
$$,\{(x_1,0.5),(x_2,1)\},\{(x_1,1),(x_2,1)\}\}.$$

و

$$|E|=2,\ \ |m_A(x)|=3,$$
$$|P(E)|=3^2$$

وبصورة عامة:

إذا كانت

$$|E|=n,\ |m_A(x)|=m$$

فإن

$$|P(E)|=m^n$$

خواص المجموعة للمجموعات الجزئية الضبابية

١- $A_m\cap B_m=B_m\cap A_m$

٢- $A_m\cup B_m=B_m\cup A_m$

٣- $(A_m\cap B_m)\cap C_m=A_m\cap(B_m\cap C_m)$

٤- $(A_m\cup B_m)\cup C_m=A_m\cup(B_m\cup C_m)$

٥- $A_m\cap A_m=A_m$

٦- $A_m\cap(B_m\cup C_m)=(A_m\cap B_m)\cup(A_m\cap C_m)$

٧- يعرف ضرب مجموعتين ضبابيتين $A_m.B_m$ على النحو التالي:

$$m_{A_m.B_m}(x)=m_{Am}(x).m_{Bm}(x),\quad \forall x\in u$$

٨- يعرف جمع مجموعتين ضبابيتين $A_m + B_m$ على النحو التالي:

$$m_{A_m+B_m}(x) = m_{A_m}(x) + m_{B_m}(x) - m_{A_m}(x).m_{B_m}(x), \quad \forall x \in u$$

ولعلنا نكتفي بهذه الإشارات السريعة على تعريف المجموعات الجزئية الضبابية وما يتعلق بها من خواص؛ والذي جاء استعراضها من أجل بناء تصور سليم حول هذه المجموعات التي باتت استخداماتها في تطبيقات الحياة العملية المختلفة تطفو على السطح.