رياضيات ١١١

MATH 111

الباب الرابع

الفصل الأول

الـــدوال:

حاصل الضرب الديكارتي:

نفترض أن **A, B** مجموعتان غير خاليتين نُعّرف الضرب الديكارتي للمجموعتين كما يلي:

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A,\ b \in B\}$$

أي مجموعة كل الأزواج المرتبة (a, b) حيث المركبة الأولى a تنتمي إلى المجموعة A بينما تقع المركبة الثانية **b** في المجموعة **B**.

أمثلة: إذا كان $A = \{a, b, c\}$ $B = \{1, 2, 3\}$ فإن:

$$A \times B = \{(a,1),(b,1),(c,1),(a,2),(b,2),(c,2),(a,3),(b,3),(c,3)\},$$

$$B \times A = \{(1,a),(1,b),(1,c),(2,a),(2,b),(2,c),(3,a),(3,b),(3,c)\}.$$

العلاقات:

نفترض أن **A,B** مجموعتان غير خاليتين ، أي مجموعة جزئية من المجموعة $A \times B$ تسمى علاقة من A إلى B.

أمثلة:

$(i)\ R = \{(a,1),(b,1),(c,1)\},$

$(ii)\ \{(a,2),(b,2),(c,2)\},$

$(iii)\ \{(1,a),(1,b),(1,c),(2,a),(2,b),(2,c),(3,a)\},$

تمثل كلٌ منهم علاقة من **A** إلى **B**. ففي العلاقة **R** نقول – على سبيل المثال – أن العنصر **a** يرتبط وفقاً للعلاقة **R** بالعنصر **1**.

الدوال:

نفترض أن A, B مجموعتان غير خاليتين ، الدالة من A إلى B هي علاقة بحيث أن كل عنصر من A يرتبط بعنصر وحيد من B. حينئذ نكتب $f: A \rightarrow B$ أي أن f دالة من A إلى B. تسمى المجموعة A بمجال الدالة f كما تسمى المجموعة B بمدى الدالة f.

أمثلة: كل واحدة من العلاقات التالية تمثل دالة:

$$f = \{(a,1),(b,2),(c,3)\},$$
$$f(a) = 1, \ \ f(b) = 2, \ \ f(c) = 3$$

قيمة الدالة f عند a يساوي 1، وقيمة الدالة f عند b يساوي 2، قيمة الدالة f عند c يساوي 3،

إذاً مجال الدالة f هو: $\{a,b,c\}$ بينما يكون مدى الدالة f هو: $\{1,2,3\}$.

$$g = \{(1,a),(2,b),(3,a)\},$$
$$g(1) = a, \ \ g(2) = b, \ \ g(3) = a$$

مجال الدالة g هو: $\{1,2,3\}$ ، و مدى الدالة f هو $\{a,b,c\}$.

بينما العلاقات التالية لا تمثل دالة:

$$\{(a,1),(a,3),(b,2),(c,3)\}$$

إذ أن: $a \rightarrow 1, a \rightarrow 3$ أي أن للعنصر a صورتان.

$$\{(c,1),(b,2),(c,2),(a,3)\}$$

إذ أن: $c \rightarrow 1, c \rightarrow 3$ أي أن للعنصر c صورتان.

الدالة بطريقة الوصف:

$$f: R \to R, \qquad f(x) = 3x + 5$$

لإيجاد قيمة الدالة f عند 2 نقوم بالتعويض عن x بـ 2:

$$f(2) = 3(2) + 5 = 11$$

$$f: R \to R, \qquad f(x) = x^2 + 1$$

لإيجاد قيمة الدالة f عند 3 نقوم بالتعويض عن x بـ 3:

$$f(3) = (3)^2 + 1 = 10$$

الفصل الثاني

أنواع الدوال:

أولاً دالة كثيرة الحدود:

الصورة العامة:

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_{0,} \quad a_n, a_{n-1}, \dots, a_0 \epsilon R$$

أمثلة:

$$f(x) = 1$$

كثيرة حدود من الدرجة صفر أو الدالة الثابتة.

$$f(x) = \sqrt{2}\,x + 3$$

كثيرة حدود من الدرجة الأولى أو الدالة الخطية.

$$f(x) = x^2 + 2$$

كثيرة حدود من الدرجة الثانية أو الدالة التربيعية.

$$\mathrm{f(x) = x^3 + +x^2 + 3x + 21}$$

كثيرة حدود من الدرجة الثالثة أو الدالة التكعيبية.

بينما الدوال الآتية لا تكون كثيرات حدود:

$$f(x) = 2\sqrt{x} + 3$$

$$f(x) = x^2 + \frac{1}{x} + 4$$

مجال الدالة كثيرة الحدود يكون مجموعة الأعداد الحقيقية $R = (-\infty, \infty)$

ثانياً الدالة الكسرية:

الدالة الكسرية هي تلك التي تكتب على الصورة:

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

حيث أن كل من $P(x), Q(x)$ تكون كثيرة حدود من أية درجة.

أمثلة:

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

$$f(x) = \frac{x^2 + 2}{x + 1}$$

$$f(x) = \frac{2}{x^2+1}.$$

بينما الدوال الآتية لا تكون كسرية:

$$f(x) = \sqrt{\frac{x^2 + 2}{x + 1}}$$

$$f(x) = \frac{x^2 + 2}{\sqrt{x} + 1}$$

أوجد قيمة الدالة $f(x) = \sqrt{x^2 + 18}$ عند $x = 3$

$\mathbf{f(3)} = \sqrt{27} = 3\sqrt{3}.$

أوجد قيمة الدالة $f(x) = 2\sqrt{x} + 3$ عند $x = 4$

$f(x) = 2\sqrt{4} + 3 = 7$

أوجد قيمة الدالة $f(x) = \frac{x^2+2}{x+1}$ عند $x = 2$

$f(2) = \frac{2^2+2}{2+1} = \frac{6}{3} = 2.$

مجال الدالة الكسرية يكون مجموعة الأعداد الحقيقية $R = (-\infty, \infty)$ ماعدا أصفار المقام أي قيم x التي تجعل المقام صفراً.

أوجد مجال الدالة $f(x) = \frac{x^2+2}{x+1}$:

نضع المقام $\mathbf{x+1=0}$ ← $x = -1$ ومن ثم مجال الدالة هو $\boldsymbol{R} - \{-\mathbf{1}\}$.

أوجد مجال الدالة $\mathbf{f(x)} = \frac{\mathbf{2}}{\mathbf{x^2+1}}$:

لأن المقام $\mathbf{x^2+1 \neq 0}$ ومن ثم مجال الدالة هو $\boldsymbol{R} = (-\infty, \infty)$.

أوجد مجال الدالة $\mathbf{f(x)} = \frac{\mathbf{x}}{\mathbf{x^2-4}}$:

نضع المقام $\mathbf{x^2-4=0}$ ← $x = \pm 2$ ومن ثم مجال الدالة هو $\boldsymbol{R} - \{\pm 2\}$.

ثالثاً الدالة الجذرية:

الصورة العامة:

$$\sqrt[n]{x}, \quad n\epsilon N$$

أمثلة:

$$f(x)=\sqrt{x^2-2}$$
$$f(x)=\sqrt[3]{x^2+x-1}$$

بينما الدوال الآتية لا تكون جذرية:

$$f(x)=\sqrt{x}+1$$

$$f(x)=\sqrt{\frac{x^2+2}{x+1}}$$

مجال الدالة الجذرية $\sqrt[2n]{\square}$ ($2n$ أي عدد زوجي) يكون مجموعة قيم x التي تجعل ما تحت الجذر غير سالباً.

أوجد مجال الدالة $\mathbf{f(x)}=\sqrt{x-1}$.

نضع ما تحت الجذر أكبر من أو يساوي صفراً $x-1\geq 0$ ← $x\geq 1$ ومن ثم مجال الدالة هو الفترة غير المحدودة $[\mathbf{1},\infty)$.

مجال الدالة الجذرية $\sqrt[2n+1]{\square}$ ($2n+1$ أي عدد فردي) يكون مجموعة الأعداد الحقيقية $R = (-\infty, \infty)$.

أوجد مجال الدالة $f(x) = \sqrt[3]{3-x}$.

لأننا أمام الجذر الثالث فإن مجال الدالة يكون مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbf{R} = (-\infty, \infty)$.

أوجد قيمة الدالة $f(x) = \sqrt[3]{3-x}$ عند $x = 30$

$$f(30) = \sqrt[3]{3-30} = \sqrt[3]{-27} = -3.$$

الفصل الثالث

الدوال الزوجية والدوال الفردية:

يُقال بأن الدالة $f(x)$ المُعرَّفة على A تكون زوجية إذا تحقق الشرط التالي:

$$f(-x) = f(x)$$

كما يُقال بأن الدالة $f(x)$ المُعرَّفة على A تكون فردية إذا تحقق الشرط التالي:

$$f(-x) = -f(x)$$

أمثلة : الدالة:

$$f(x) = x^n$$

تكون زوجية إذا كان العدد n زوجي ، تكون فردية إذا كان العدد n فردي.

- الدالة $f(x) = x^2$ تكون زوجية.
- الدالة $f(x) = x^4$ تكون زوجية.
- الدالة $f(x) = 1$ تكون زوجية.
- الدالة $f(x) = x$ تكون فردية.
- الدالة $f(x) = x^3$ تكون فردية.
- الدالة $f(x) = x^5$ تكون فردية.

خصائص بديهية للدوال الزوجية والدوال الفردية:

أولاً: مجموع دالتين زوجيتين (فرديتين) تكون دالة زوجية (فردية).

أمثلة: الدالة:

$$f(x) = x^2 + 2$$

تكون زوجية إذ أن كل من $\mathbf{x^2, 2}$ دالة زوجية.

الدالة:

$$f(x) = 3x^2 + x^4$$

تكون زوجية إذ أن كل من $\mathbf{x^2}, \boldsymbol{x^4}$ دالة زوجية.

ملاحظة: يمكن استبدال كلمة مجموع بكلمة الفرق في الخاصية السابقة وعليه تكون الدالة

$$f(x) = 3x^3 - x$$

فردية إذ أن كل من $\boldsymbol{x, x^3}$ دالة فردية.

ثانياً: مجموع (فرق) دالتين احداهما زوجية والأخرى فردية تكون لا زوجية ولا فردية.

الدالة:

$$f(x) = x + 1$$

تكون لا زوجية ولا فردية، إذ أن **1** دالة زوجية بينما **x** دالة فردية

الدالة:

$$f(x) = x^2 + x$$

تكون لا زوجية ولا فردية.

ثالثاً: حاصل ضرب دالتين زوجيتين (فرديتين) تكون دالة زوجية.

الدالة:

$$f(x) = (x^2 + 2)^n$$

تكون زوجية إذ أن $\mathbf{x^2 + 2}$ دالة زوجية.

الدالة:

$$f(x) = (x + 1)^2$$

تكون زوجية إذ أن $x + 1$ دالة فردية.

ملاحظة: يمكن استبدال كلمة حاصل الضرب في الخاصية السابقة بكلمة قسمة وعليه تكون الدالة

$$f(x)=\frac{x^2+2}{x^4+1}$$

تكون زوجية إذ أن كل من x^2+2, x^4+1 دالة زوجية.

الدالة

$$f(x)=\frac{3x^3+x}{x}$$

تكون زوجية إذ أن كل من $3x^3+x$, x دالة فردية.

ثالثاً: قسمة دالتين احداهما زوجية والأخرى فردية تكون فردية.

الدالة

$$f(x)=\frac{3x^2+1}{x}$$

تكون فردية إذ أن $3x^2+1$ دالة زوجية بينما x دالة فردية.

الفصل الرابع

الدوال المسترسلة:

أولاً الدالة الأسية:

وهناك نوعان من الدوال الأسية بحسب الأساس.

الدالة الأسية العامة:

$$f(x) = a^x$$

حيث $a \neq 1$ عدد حقيقي موجب يُسمى الأساس. بينما إذا كان الأساس $a = e$ (حيث e عدد حقيقي موجب غير كسري) سُميت الدالة الأسية بالدالة الأسية الطبيعية.

$$f(x) = e^x$$

ملاحظة: لا تختلف خصائص وقوانين الدالة الأسية إن اختلف الأساس. فأيَّ كان الأساس مجال تعريف الدالة الأسية هو R بينما مدى الدالة الأسية هو $(0, \infty)$.

أمثلة:

فإن: $\left(\frac{1}{3}\right)^x$, 2^x تمثال دوال أسية عامة إذ أن الأس في هذه الدوال يكون متغيراً.

بينما x^3 لا تمثل دالة أسية إذ أن الأس في هذه الدالة يكون ثابتاً. كما أن الدالة x^x ليست أسية لأن الأساس في هذه الدالة ليس ثابتاً.

خصائص عامة للدالة الأسية:

$$a^x a^y = a^{x+y},$$

$$\frac{1}{a^y} = a^{-y}, \frac{a^x}{a^y} = a^{x-y},$$

$$(a^x)^y = a^{xy}$$

الدوال اللوغاريتمية:

وأيضاً هناك نوعان من الدوال اللوغاريتمية بحسب الأساس.

الدالة اللوغاريتمية العامة:

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = log_a x$$

حيث $a \neq 1$ عدد حقيقي موجب يُسمى الأساس. بينما إذا كان الأساس $\boldsymbol{a} = e$ سُميت الدالة اللوغاريتمية بالدالة اللوغاريتمية الطبيعية.

$$f(x) = log_e x = \ln x$$

خصائص عامة للدالة اللوغاريتمية:

$$log_a xy = log_a x + log_a y,$$

$$log_a \frac{x}{y} = log_a x - log_a y,$$

$$log_a x^b = b\, log_a x$$

ملاحظة: للدالة اللوغاريتمية الطبيعية ذات الخصائص.

مما سبق دراسته في المراحل السابقة أنه إذا كانت:

$$y = log_a x$$

فإن:

$$x = a^y$$

أي أننا نستطيع كتابة التالي:

$$log_a a^x = x \qquad (1)$$
$$a^{log_a x} = x \qquad (2)$$

من (1) نستنتج أن $log_a a = 1$

أمثلة متنوعة:

$$log_2 2 = 1,$$

$$log_2 16 = log_2 2^4 = 4,$$

$$log_2 \frac{1}{16} = log_2 (16)^{-1} = -4,$$

$$log_2 \sqrt{2} = log_2 2^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} log_2 2 = \frac{1}{2}.$$

$$log_2 32 + log_5 125 = log_2 2^5 + log_5 5^3 = 5log_2 2 + 3log_5 5 = 8$$

-

أوجد قيمة x من المعادلة التالية:

$$2^{3x-1} = 32$$

$$2^{3x-1} = 2^5 \quad \rightarrow \quad 3x - 1 = 5 \quad \rightarrow \quad x = 2$$

أوجد قيمة x من المعادلة التالية:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{3x-1} = 16$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{3x-1} = 16 \quad \rightarrow \quad \left(\frac{1}{2}\right)^{3x-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{-4} \quad \rightarrow \quad 3x - 1 = -4 \quad \rightarrow x = -1$$

أوجد قيمة x من المعادلة التالية:

$$log_x 32 = 5$$

$$log_x 32 = 5 \quad \rightarrow \quad x^5 = 32 \quad \rightarrow \quad x^5 = 2^5 \quad \rightarrow \quad x = 2$$

أوجد قيمة x من المعادلة التالية:

$$log_2(x - 2) = 4$$

$$log_2(x - 2) = 4 \quad \rightarrow \quad x - 2 = 2^4 \quad \rightarrow \quad x - 2 = 16 \quad \rightarrow \quad x = 18$$

أوجد قيمة x من المعادلة التالية:

$$log_2 32 = x + 1$$

$$log_2 32 = x + 1 \quad \rightarrow \quad log_2 2^5 = x + 1 \quad \rightarrow \quad 5\, log_2 2 = x + 1 \quad \rightarrow \quad 5 = x + 1 \quad \rightarrow x = 4$$

الفصل الخامس

الدالة العكسية:

نفترض أن الدالة $f:\mathrm{A}\rightarrow \mathrm{B}$ تحقق شرط أن يكون لها معكوس فما هو المعكوس؟

يُقال أن الدالة $g:\mathrm{B}\rightarrow \mathrm{A}$ معكوساً للدالة $f:\mathrm{A}\rightarrow \mathrm{B}$ إذا تحقق الشرطين التاليين:

$$(gof)(x) = x,\ \ \forall x \epsilon \mathrm{A},$$
$$(fog)(\mathrm{y}) = \mathrm{y},\ \ \forall \mathrm{y} \epsilon \mathrm{B}$$

حينئذ نرمز لمعكوس الدالة $f:\mathrm{A}\rightarrow \mathrm{B}$ بالرمز f^{-1} .

نلاحظ مما سبق أن مجال دالة المعكوس f^{-1} هو مدى الدالة الأصلية f كما أن مدى دالة المعكوس f^{-1} هو مجال الدالة الأصلية f.

خطوات إيجاد دالة المعكوس:

أولاً: نضع $y = f(x)$.

ثانياً: نقوم بحل المعادلة $y = f(x)$ لإيجاد x.

ثالثاً: نستبدل كل y بـ x.

أمثلة:

أوجد معكوس الدالة $f(x) = 2x - 1$

أولاً: نضع $y = 2x - 1$

ثانياً: نقوم بحل المعادلة $y = f(x)$ لإيجاد x

$$y = 2x - 1 \rightarrow x = \frac{1}{2}(y + 1)$$

ثالثاً: نستبدل كل y بـ x.

$$f^{-1}(x) = \frac{1}{2}(x + 1)$$

أوجد معكوس الدالة $f(x) = \sqrt{2x - 1}$

$$y = \sqrt{2x - 1} \rightarrow y^2 = 2x - 1 \rightarrow x = \frac{1}{2}(y^2 + 1) \rightarrow f^{-1}(x) = \frac{1}{2}(x^2 + 1)$$

أوجد معكوس الدالة $f(x) = 3^{x-1}$

$$y = 3^{x-1} \rightarrow log_3 y = log_3 3^{x-1} \rightarrow x - 1 = log_3 y \rightarrow f^{-1}(x) = 1 + log_3 x$$