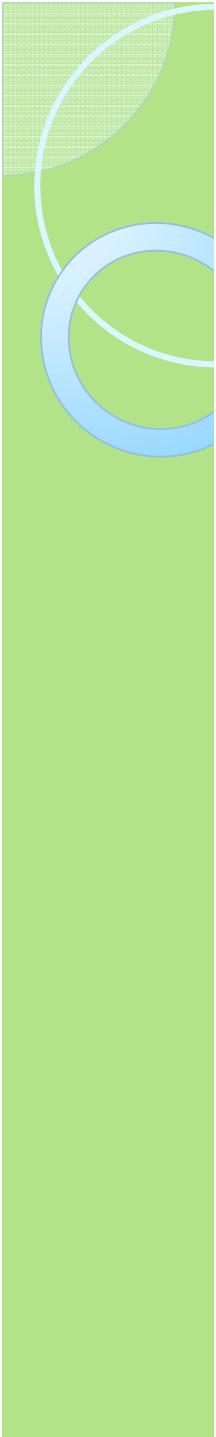




رِياضِيَّاتٌ

MATH

الباب الرابع





الفصل الأول

الدوال:

حاصل الضرب الديكارتي:

نفترض أن A, B مجموعتان غير خاليتين نعرف الضرب الديكارتي للمجموعتين كما يلي:

$$A \times B = \{(a, b) | a \in A, b \in B\}$$

أي مجموعة كل الأزواج المرتبة (a, b) حيث المركبة الأولى a تتبع إلى المجموعة A بينما تقع المركبة الثانية b في المجموعة B .

أمثلة: إذا كان $A = \{a, b, c\} B = \{1, 2, 3\}$ فإن:

$$A \times B = \{(a, 1), (b, 1), (c, 1), (a, 2), (b, 2), (c, 2), (a, 3), (b, 3), (c, 3)\},$$

$$B \times A = \{(1, a), (1, b), (1, c), (2, a), (2, b), (2, c), (3, a), (3, b), (3, c)\}.$$



العلاقات:

نفترض أن A, B مجموعتان غير خاليتين ، أي مجموعة جزئية من المجموعة $A \times B$ تسمى علاقة من A إلى B .

أمثلة:

- (i) $R = \{(a, 1), (b, 1), (c, 1)\},$
- (ii) $\{(a, 2), (b, 2), (c, 2)\},$
- (iii) $\{(1, a), (1, b), (1, c), (2, a), (2, b), (2, c), (3, a)\},$

تمثل كل منهم علاقة من A إلى B . ففي العلاقة R نقول - على سبيل المثال - أن العنصر a يرتبط وفقاً للعلاقة R بالعنصر 1.



الدوال:

نفترض أن A, B مجموعتان غير خاليتين ، الدالة من A إلى B هي علاقة بحيث أن كل عنصر من A يرتبط بعنصر وحيد من B . حينئذ نكتب $f: A \rightarrow B$ أي أن f دالة من A إلى B . تسمى المجموعة A بمجال الدالة f كما تسمى المجموعة B ب مدى الدالة f .

أمثلة: كل واحدة من العلاقات التالية تمثل دالة:

$$f = \{(a, 1), (b, 2), (c, 3)\}, \\ f(a) = 1, \quad f(b) = 2, \quad f(c) = 3$$

قيمة الدالة f عند a يساوي 1، وقيمة الدالة f عند b يساوي 2، قيمة الدالة f عند c يساوي 3،
إذاً مجال الدالة f هو: $\{a, b, c\}$ بينما يكون مدى الدالة f هو: $\{1, 2, 3\}$.

$$g = \{(1, a), (2, b), (3, a)\}, \\ g(1) = a, \quad g(2) = b, \quad g(3) = a \\ \text{مجال الدالة } g \text{ هو: } \{1, 2, 3\} , \text{ و مدى الدالة } f \text{ هو: } \{a, b, c\}$$

بينما العلاقات التالية لا تمثل دالة:

$$\{(a, 1), (a, 3), (b, 2), (c, 3)\} \\ \text{إذ أن: } a \rightarrow 1, a \rightarrow 3 \text{ أي أن للعنصر } a \text{ صورتان.}$$

$$\{(c, 1), (b, 2), (c, 2), (a, 3)\} \\ \text{إذ أن: } c \rightarrow 1, c \rightarrow 3 \text{ أي أن للعنصر } c \text{ صورتان.}$$



الدالة بطريقة الوصف:

$$f: R \rightarrow R, \quad f(x) = 3x + 5$$

لإيجاد قيمة الدالة f عند 2 نقوم بال subsitute عن x بـ 2:

$$f(2) = 3(2) + 5 = 11$$

$$f: R \rightarrow R, \quad f(x) = x^2 + 1$$

لإيجاد قيمة الدالة f عند 3 نقوم بال subsitute عن x بـ 3:

$$f(3) = (3)^2 + 1 = 10$$

الفصل الثاني

أنواع الدوال:

أولاً دالة كثيرة الحدود:

الصورة العامة:

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0, \quad a_n, a_{n-1}, \dots, a_0 \in R$$

أمثلة:

$$f(x) = 1$$

كثيرة حدود من الدرجة صفر أو الدالة الثابتة.

$$f(x) = \sqrt{2}x + 3$$

كثيرة حدود من الدرجة الأولى أو الدالة الخطية.

$$f(x) = x^2 + 2$$

كثيرة حدود من الدرجة الثانية أو الدالة التربيعية.

$$f(x) = x^3 + x^2 + 3x + 21$$

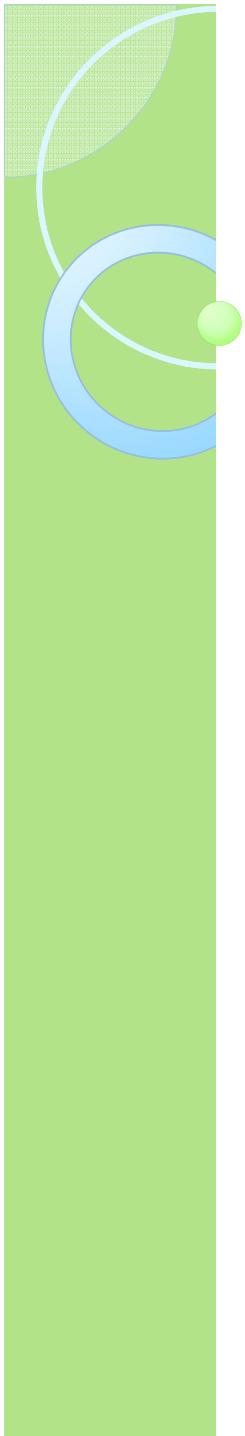
كثيرة حدود من الدرجة الثالثة أو الدالة التكعيبية.

بينما الدوال الآتية لا تكون كثيرات حدود:

$$f(x) = 2\sqrt{x} + 3$$

$$f(x) = x^2 + \frac{1}{x} + 4$$

مجال الدالة كثيرة الحدود يكون مجموعة الأعداد الحقيقية $R = (-\infty, \infty)$





ثانياً الدالة الكسرية:

الدالة الكسرية هي تلك التي تكتب على الصورة:

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

حيث أن كل من $P(x), Q(x)$ تكون كثيرة حدود من الدرجة.

أمثلة:

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

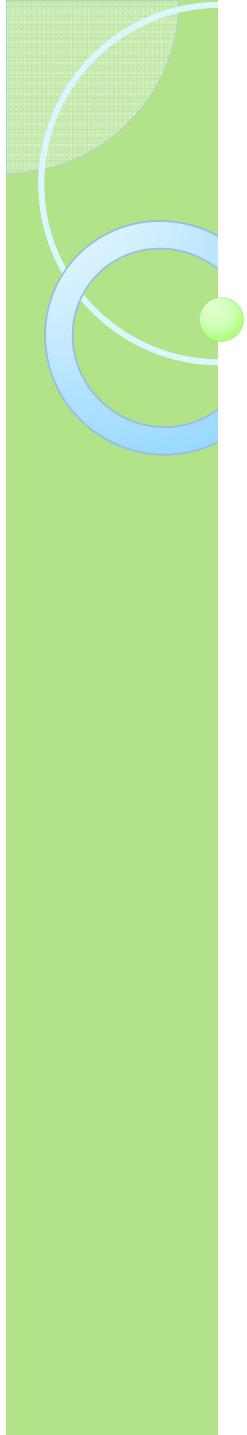
$$f(x) = \frac{x^2 + 2}{x + 1}$$

$$f(x) = \frac{2}{x^2 + 1}.$$

بينما الدوال الآتية لا تكون كسرية:

$$f(x) = \sqrt{\frac{x^2 + 2}{x + 1}}$$

$$f(x) = \frac{x^2 + 2}{\sqrt{x + 1}}$$



أوجد قيمة الدالة $f(x) = \sqrt{x^2 + 18}$ عند $x = 3$

$$f(3) = \sqrt{27} = 3\sqrt{3}.$$

أوجد قيمة الدالة $f(x) = 2\sqrt{x} + 3$ عند $x = 4$

$$f(x) = 2\sqrt{4} + 3 = 7$$

أوجد قيمة الدالة $f(x) = \frac{x^2 + 2}{x+1}$ عند $x = 2$

$$f(2) = \frac{2^2 + 2}{2+1} = \frac{6}{3} = 2.$$



مجال الدالة الكسرية يكون مجموعه الأعداد الحقيقية $R = (-\infty, \infty)$ ما عدا أصفار المقام أي قيم x التي تجعل المقام صفراء.

$$\text{أوجد مجال الدالة } : f(x) = \frac{x^2+2}{x+1}$$

نضع المقام $0 = x + 1 \leftarrow x = -1$ ومن ثم مجال الدالة هو $R - \{-1\}$.

$$\text{أوجد مجال الدالة } : f(x) = \frac{2}{x^2+1}$$

لأن المقام $0 \neq x^2 + 1$ ومن ثم مجال الدالة هو $R = (-\infty, \infty)$.

$$\text{أوجد مجال الدالة } : f(x) = \frac{x}{x^2-4}$$

نضع المقام $0 = x = \pm 2 \leftarrow x^2 - 4 = 0$ ومن ثم مجال الدالة هو $R - \{\pm 2\}$.



ثالثاً دالة الجذرية:

الصورة العامة:

$$\sqrt[n]{x}, \quad n \in N$$

أمثلة:

$$f(x) = \sqrt{x^2 - 2}$$

$$f(x) = \sqrt[3]{x^2 + x - 1}$$

بينما الدوال الآتية لا تكون جذرية:

$$f(x) = \sqrt{x} + 1$$

$$f(x) = \sqrt{\frac{x^2 + 2}{x + 1}}$$

مجال الدالة الجذرية $\sqrt[2n]{\square}$ (أي عدد زوجي) يكون مجموعة قيم x التي تجعل ما تحت الجذر غير سالباً.

$$\text{أوجد مجال الدالة } f(x) = \sqrt{x - 1}$$

نضع ما تحت الجذر أكبر من أو يساوي صفرأ $x - 1 \geq 0 \leftarrow x \geq 1$ ومن ثم مجال الدالة هو الفترة غير المحدودة $[1, \infty)$.


$$R = (-\infty, \infty)$$

مجال الدالة الجذرية $\sqrt[2n+1]{\square}$ يكون مجموعه الأعداد الحقيقية

أوجد مجال الدالة $f(x) = \sqrt[3]{3 - x}$

لأننا أمام الجذر الثالث فإن مجال الدالة يكون مجموعه الأعداد الحقيقية $R = (-\infty, \infty)$

أوجد قيمة الدالة $f(x) = \sqrt[3]{3 - x}$ عند $x = 30$

$$f(30) = \sqrt[3]{3 - 30} = \sqrt[3]{-27} = -3.$$

الفصل الثالث

الدوال الزوجية والدوال الفردية:

يُقال بأن الدالة $f(x)$ المعرفة على A تكون زوجية إذا تحقق الشرط التالي:

$$f(-x) = f(x)$$

كما يُقال بأن الدالة $f(x)$ المعرفة على A تكون فردية إذا تتحقق الشرط التالي:

$$f(-x) = -f(x)$$

أمثلة: الدالة:

$$f(x) = x^n$$

تكون زوجية إذا كان العدد n زوجي ، تكون فردية إذا كان العدد n فردي.

- الدالة $f(x) = x^2$ تكون زوجية.

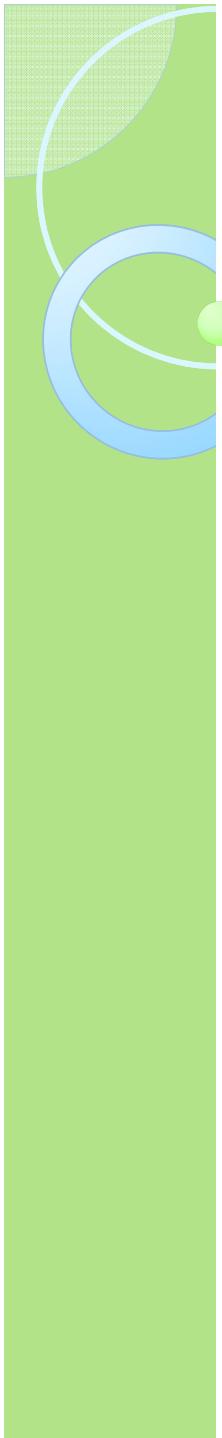
- الدالة $f(x) = x^4$ تكون زوجية.

- الدالة $f(x) = 1$ تكون زوجية.

- الدالة $f(x) = x$ تكون فردية.

- الدالة $f(x) = x^3$ تكون فردية.

- الدالة $f(x) = x^5$ تكون فردية.





خصائص بدائية للدوال الزوجية والدوال الفردية:

أولاً: مجموع دالتين زوجيتين (فردويتين) تكون دالة زوجية (فردية).

أمثلة: الدالة:

$$f(x) = x^2 + 2$$

تكون زوجية إذ أن كل من x^2 , 2 دالة زوجية.

الدالة:

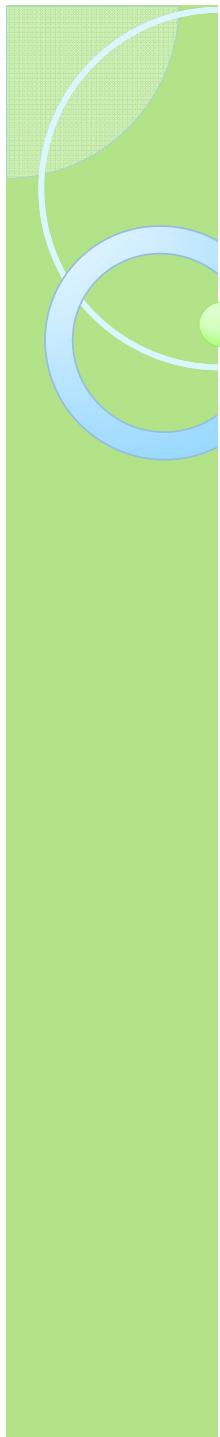
$$f(x) = 3x^2 + x^4$$

تكون زوجية إذ أن كل من x^2 , x^4 دالة زوجية.

ملاحظة: يمكن استبدال الكلمة مجموع بكلمة الفرق في الخاصية السابقة وعليه تكون الدالة

$$f(x) = 3x^3 - x$$

فردية إذ أن كل من x^3 , $-x$ دالة فردية.



ثانياً: مجموع (فرق) دالتين احدهما زوجية والأخرى فردية تكون لا زوجية ولا فردية.
الدالة:

$$f(x) = x + 1$$

تكون لا زوجية ولا فردية، إذ أن **1** دالة زوجية بينما **x** دالة فردية.

الدالة:

$$f(x) = x^2 + x$$

تكون لا زوجية ولا فردية.

ثالثاً: حاصل ضرب دالتين زوجيتين (فرديتين) تكون دالة زوجية.

الدالة:

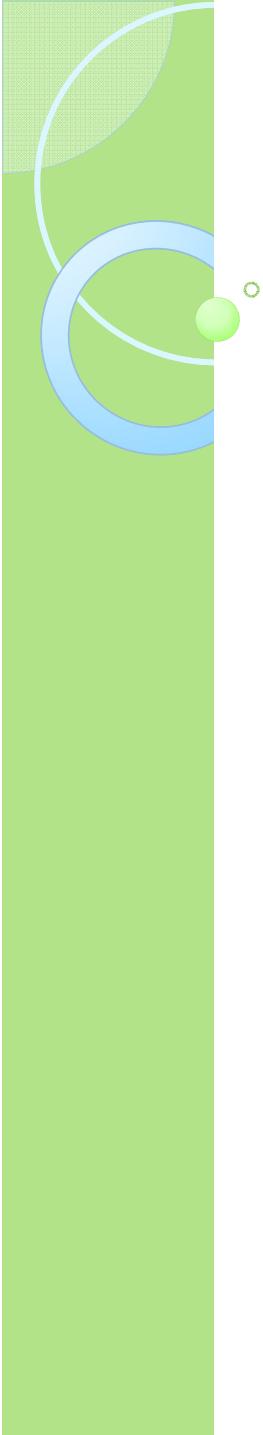
$$f(x) = (x^2 + 2)^n$$

تكون زوجية إذ أن **2** دالة زوجية.

الدالة:

$$f(x) = (x + 1)^2$$

تكون زوجية إذ أن **x + 1** دالة فردية.



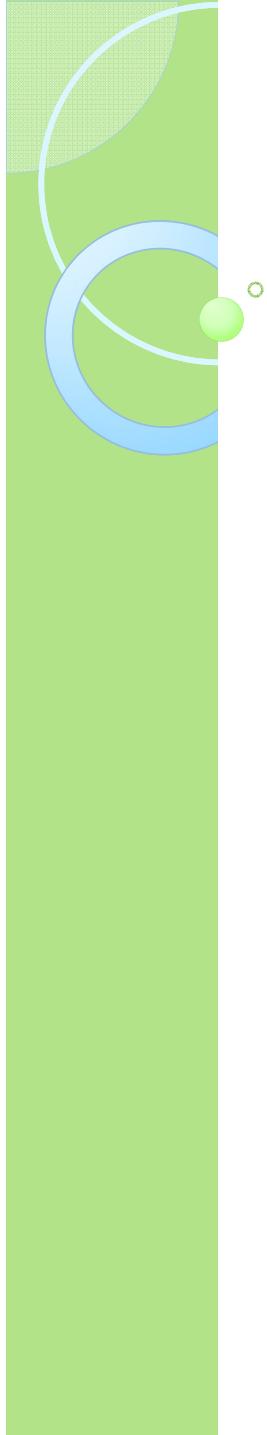
ملاحظة: يمكن استبدال الكلمة حاصل الضرب في الخاصية السابقة بكلمة قسمة وعليه تكون الدالة

$$f(x) = \frac{x^2 + 2}{x^4 + 1}$$

تكون زوجية إذ أن كل من $x^2 + 2, x^4 + 1$ دالة زوجية.
الدالة

$$f(x) = \frac{3x^3 + x}{x}$$

تكون فردية إذ أن كل من $x, 3x^3 + x$ دالة فردية.



ثالثاً: قسمة دالتين احدهما زوجية والأخرى فردية تكون فردية.

الدالة

$$f(x) = \frac{3x^2 + 1}{x}$$

تكون فردية إذ أن $3x^2 + 1$ دالة زوجية بينما x دالة فردية.

الفصل الرابع

الدوال المسترسلة:

أولاً الدالة الأسيّة:

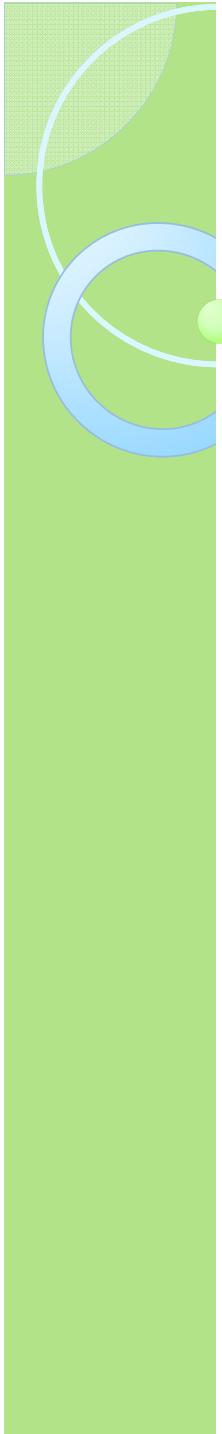
وهناك نوعان من الدوال الأسيّة بحسب الأساس.

الدالة الأسيّة العامة:

$$f(x) = a^x$$

حيث $a \neq 1$ عدد حقيقي موجب يُسمى الأساس. بينما إذا كان الأساس $a = e$ (حيث e عدد حقيقي موجب غير كسري) سميت الدالة الأسيّة بالدالة الأسيّة الطبيعية.

$$f(x) = e^x$$





ملاحظة: لا تختلف خصائص وقوانين الدالة الأسية إن اختلف الأساس. فائي كان الأساس مجال تعريف الدالة الأسية هو R بينما مدى الدالة الأسية هو $(0, \infty)$.

أمثلة:

فإن: $2^x, \left(\frac{1}{3}\right)^x$ ثمثال دوال أسيّة عامة إذ أن الأساس في هذه الدوال يكون متغيراً، بينما x^3 لا تمثل دالة أسيّة إذ أن الأساس في هذه الدالة يكون ثابتاً. كما أن الدالة x^x ليست أسيّة لأن الأساس في هذه الدالة ليس ثابتاً.

خصائص عامة للدالة الأسية:

$$\begin{aligned}a^x a^y &= a^{x+y}, \\ \frac{1}{a^y} &= a^{-y}, \quad \frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}, \\ (a^x)^y &= a^{xy}\end{aligned}$$



الدوال اللوغاريتمية:

وأيضاً هناك نوعان من الدوال اللوغاريتمية بحسب الأساس.

الدالة اللوغاريتمية العامة:

$$f(x) = \log_a x$$

حيث $a \neq 1$ عدد حقيقي موجب يسمى الأساس. بينما إذا كان الأساس $a = e$ سميت الدالة اللوغاريتمية بالدالة اللوغاريتمية الطبيعية.

$$f(x) = \log_e x = \ln x$$

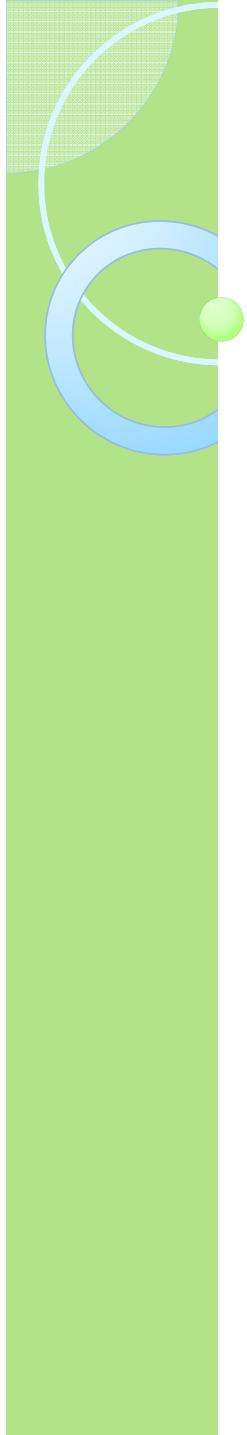
خصائص عامة للدالة اللوغاريتمية:

$$\log_a xy = \log_a x + \log_a y,$$

$$\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y,$$

$$\log_a x^b = b \log_a x$$

ملاحظة: للدالة اللوغاريتمية الطبيعية ذات الخصائص.



مما سبق دراسته في المراحل السابقة أنه إذا كانت:

$$y = \log_a x$$

فإن:

$$x = a^y$$

أي أنتا نستطيع كتابة التالي:

$$\log_a a^x = x \quad (1)$$

$$a^{\log_a x} = x \quad (2)$$

من (1) نستنتج أن $\log_a a = 1$

أمثلة متعددة:

$$\log_2 2 = 1,$$

$$\log_2 16 = \log_2 2^4 = 4,$$

$$\log_2 \frac{1}{16} = \log_2 (16)^{-1} = -4,$$

$$\log_2 \sqrt{2} = \log_2 2^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \log_2 2 = \frac{1}{2}.$$

$$\log_2 32 + \log_5 125 = \log_2 2^5 + \log_5 5^3 = 5 \log_2 2 + 3 \log_5 5 = 8$$



أوجد قيمة x من المعادلة التالية:

$$2^{3x-1} = 32$$
$$2^{3x-1} = 2^5 \rightarrow 3x - 1 = 5 \rightarrow x = 2$$

أوجد قيمة x من المعادلة التالية:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{3x-1} = 16$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{3x-1} = 16 \rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{3x-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{-4} \rightarrow 3x - 1 = -4 \rightarrow x = -1$$

أوجد قيمة x من المعادلة التالية:

$$\log_x 32 = 5$$
$$\log_x 32 = 5 \rightarrow x^5 = 32 \rightarrow x^5 = 2^5 \rightarrow x = 2$$

أوجد قيمة x من المعادلة التالية:

$$\log_2(x-2) = 4$$
$$\log_2(x-2) = 4 \rightarrow x-2 = 2^4 \rightarrow x-2 = 16 \rightarrow x = 18$$

أوجد قيمة x من المعادلة التالية:

$$\log_2 32 = x + 1$$
$$\log_2 32 = x + 1 \rightarrow \log_2 2^5 = x + 1 \rightarrow 5 \log_2 2 = x + 1 \rightarrow 5 = x + 1 \rightarrow x = 4$$

الفصل الخامس

الدالة العكسية:

نفترض أن الدالة $f: A \rightarrow B$ تحقق شرط أن يكون لها معكوس فما هو المعكوس؟
يقال أن الدالة $g: B \rightarrow A$ معكوساً للدالة $f: A \rightarrow B$ إذا تحقق الشرطين التاليين:

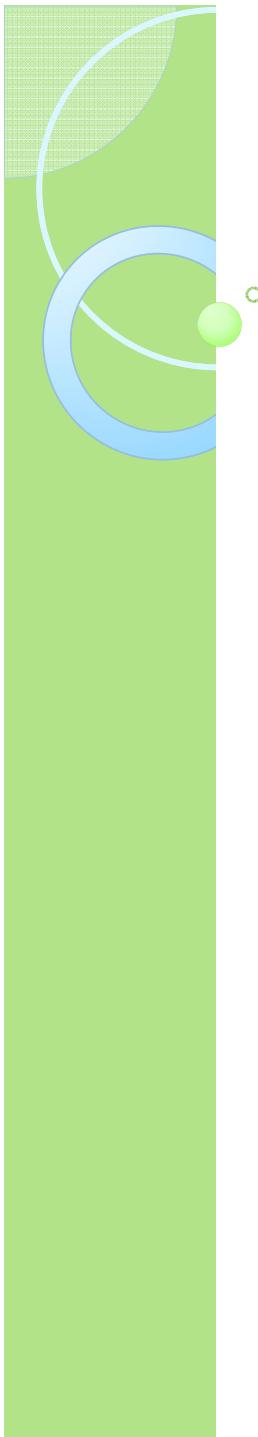
$$(gof)(x) = x, \quad \forall x \in A,$$
$$(fog)(y) = y, \quad \forall y \in B$$

حينئذ نرمز لمعكوس الدالة $f: A \rightarrow B$ بالرمز f^{-1} .

نلاحظ مما سبق أن مجال دالة المعكوس f^{-1} هو مدى الدالة الأصلية f كما أن مدى دالة المعكوس f^{-1} هو مجال الدالة الأصلية f .

خطوات إيجاد دالة المعكوس:

- أولاً: نضع $y = f(x)$.
- ثانياً: نقوم بحل المعادلة $y = f(x)$ لإيجاد x .
- ثالثاً: نستبدل كل y بـ x .





أمثلة:

أوجد معكوس الدالة $f(x) = 2x - 1$

أولاً: نضع $y = 2x - 1$

ثانياً: نقوم بحل المعادلة $y = f(x)$ لإيجاد x

$$y = 2x - 1 \rightarrow x = \frac{1}{2}(y + 1)$$

ثالثاً: نستبدل كل y بـ x .

$$f^{-1}(x) = \frac{1}{2}(x + 1)$$

أوجد معكوس الدالة $f(x) = \sqrt{2x - 1}$

$$y = \sqrt{2x - 1} \rightarrow y^2 = 2x - 1 \rightarrow x = \frac{1}{2}(y^2 + 1) \rightarrow f^{-1}(x) = \frac{1}{2}(x^2 + 1)$$

أوجد معكوس الدالة $f(x) = 3^{x-1}$

$$y = 3^{x-1} \rightarrow \log_3 y = \log_3 3^{x-1} \rightarrow x - 1 = \log_3 y \rightarrow f^{-1}(x) = 1 + \log_3 x$$