رياضيات ١١١

MATH 111

الباب الثالث

الفصل الأول

معادلات الدرجة الأولى:

الصورة العامة:

$$ax + b = 0, \qquad a \neq 0$$

حل معادلة الدرجة الأولى في مجهول واحد جبرياً:

الطريقة: طرح b من طرفي المعادلة

$$ax + b - b = -b \quad \to \quad ax = -b$$

بقسمة طرفي المعادلة على a

$$x = -\frac{b}{a}.$$

أمثلة:

$$(i)\ 2x - 3 = 4 \quad \to \quad 2x = 7 \quad \to \quad x = \frac{7}{2}.$$

$$(ii)\ 2(x - 1) = 3x + 2 \quad \to \quad 2x - 2 = 3x + 2 \quad \to \quad -4 = x.$$

$$(iii)\ \sqrt{x - 1} = 3 \quad \to \quad x - 1 = 9 \quad \to \quad x = 10.$$

حل معادلات الدرجة الأولى في مجهولين جبرياً:

نظام المعادلات الآنية من الدرجة الأولى:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 & (1) \\ a_2x + b_2y = c_2 & (2) \end{cases}$$

أولاً طريقة التعويض:

من المعادلة (1) نحصل على المجهول y بدلالة المجهول x:

$$y = \frac{c_1}{b_1} - \frac{a_1}{b_1}\,x \qquad (3)$$

بالتعويض من المعادلة (3) عن y في المعادلة (2) نجد أن

$$a_2x + b_2\left(\frac{c_1}{b_1} - \frac{a_1}{b_1}\right)x = c_2 \qquad (2)$$

وبالطريقة السابقة نوجد x.

أمثلة:

$$\begin{cases} x - y = 6 & (1) \\ 2x + y = 3 & (2) \end{cases}$$

من المعادلة (1) نحصل على:

$$x = 6 + y \qquad (3)$$

بالتعويض من (3) في (2):

$$2(6 + y) + y = 3 \quad \rightarrow \quad 3y = -9 \quad \rightarrow \quad y = -3$$

بالتعويض في (3):

$$x = 6 + (-3) = 3$$

حلول النظام $(1), (2)$ هي: $x = 3, \quad y = -3$

ثانياً طريقة الحذف:

من خلال الحذف المتتالي للمجاهيل يمكن حل نظام يحوي أي عدد من المعادلات:

إذا أردنا أن نطبق طريقة الحذف لحل النظام $(1),(2)$ نجعل معاملات أحد المجهولين متساويين ومختلفي الإشارة.

وهذا يكون متحققاً بالنسبة للنظام:

$$\begin{cases} x - y = 6 & (1) \\ 2x + y = 3 & (2) \end{cases}$$

إذ أن معاملات المجهول y في المعادلتين تكون على الترتيب $-1, 1$ أي متساويين ومختلفي الإشارة.

نقوم الآن بجمع المعادلتين معاً نحصل على:

$$(x + 2x) + (-y + y) = 9 \quad \rightarrow \quad 3x = 9 \quad \rightarrow \quad x = 3$$

بالتعويض في احدى المعادلتين – ولتكن (2) – عن قيمة x نحصل على:

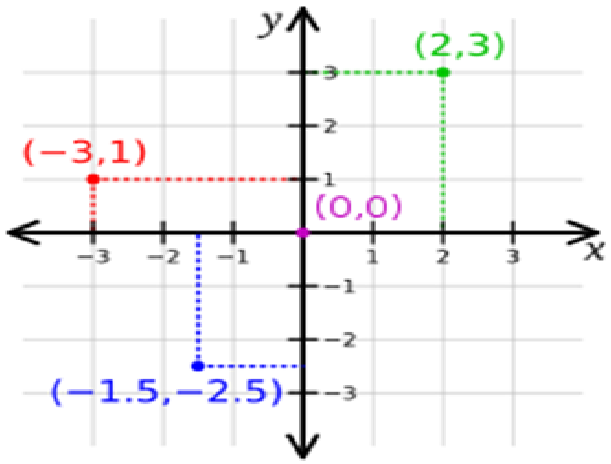
$$2(3) + y = 3 \quad \rightarrow \quad y = -3$$

إذاً حلول النظام $(1),(2)$ هي: $x = 3, \quad y = -3$.

الفصل الثاني

نظام الإحداثيات المستوية الديكَارتية:

يستعمل نظام الإحداثيات الديكارتية لتحديد نقطة في مستوي عبر عددين x (ويُسمى الإحداثي الأول)، y (ويُسمى الإحداثي الثاني) ويُكتب (x, y) .



النقطة $(2, 3)$ تقع في الربع الأول.

النقطة $(-3, 1)$ تقع في الربع الثاني.

النقطة $(-1.5, -2.5)$ تقع في الربع الثالث.

المسافة بين نقطتين في المستوى:

قانون إيجاد المسافة بين النقطتين $P(x_1, y_1), Q(x_2, y_2)$ هو:

$$d(P,Q) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

أمثلة:

1- أوجد المسافة بين النقطتين $P(-1,2), Q(3,-4)$:

$$d(P,Q) = \sqrt{\left(3 - (-1)\right)^2 + (-4 - 2)^2} = \sqrt{(4)^2 + (-6)^2} = \sqrt{52}.$$

2- أوجد المسافة بين النقطتين $P(4,1), Q(1,5)$:

$$d(P,Q) = \sqrt{(1 - 4)^2 + (5 - 1)^2} = \sqrt{(3)^2 + (4)^2} = 5.$$

نقطة المنتصف بين النقطتين في المستوى:

قانون إيجاد نقطة المنتصف بين النقطتين $\mathbf{P}(\mathbf{x}_1, \mathbf{y}_1), \mathbf{Q}(\mathbf{x}_2, \mathbf{y}_2)$ هو:

$$\left(\frac{\boldsymbol{x_1+x_2}}{2}, \frac{\boldsymbol{y_1+y_2}}{2}\right)$$

أمثلة:

أوجد نقطة المنتصف بين النقطتين $\mathbf{P}(4,5), \mathbf{Q}(2,3)$

$$\left(\frac{\mathbf{4+2}}{2}, \frac{\mathbf{5+3}}{2}\right) = (3,4).$$

معادلات الخط المستقيم :

ميل الخط المستقيم :

قانون الميل للخط المستقيم المار بالنقطتين:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

مثال :

أوجد ميل الخط المستقيم المار بالنقطتين $P(-1,2), Q(3,-4)$:

$$m = \frac{-4-2}{3-(-1)} = -\frac{6}{4} = -\frac{3}{2}.$$

الحالات الخاصة للخط المستقيم:

ميل المستقيم الأفقي يساوي $0 = \frac{y-y}{x_2-x_1} = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} = \mathbf{m}$.

ميل المستقيم الرأسي يكون غير مُعرّفاً إذ سيكون المقام في قانون الميل صفراً.

معادلة الخط المستقيم الذي ميله m ويمر بالنقطة $P(x_1,y_1)$ هي:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

أمثلة:

1- أوجد معادلة الخط المستقيم الذي ميله $\frac{-1}{3}$ والمار بالنقطة $P(3,-4)$:

$$y-(-4)=\frac{-1}{3}(x-3) \quad \rightarrow \quad y=\frac{-1}{3}x-3.$$

2- أوجد معادلة الخط المستقيم الأفقي الذي يمر بالنقطة $P(2,3)$:

$$y-3=0(x-2) \quad \rightarrow \quad y=3.$$

3- أوجد معادلة الخط المستقيم الرأسي الذي يمر بالنقطة $P(2,3)$:

$$x=2.$$

4- معادلة محور $-x$ هي: $y=0$.

5- معادلة محور $-y$ هي: $x=0$.

ملاحظة:

يُمكن إعادة المعادلة: $y-y_1=m(x-x_1)$

$$y-y_1=m(x-x_1) \quad \rightarrow \quad y=mx+(y_1-mx) \quad \rightarrow \quad y=mx+c.$$

ومن ثم فإن (ومن الصورة : $y=mx+c$) نستنتج أن معامل x يُمثل ميل المستقيم، ولذا تسمى هذه الصورة بالصورة القياسية لمعادلة الخط المستقيم.

أمثلة:

أوجد ميل الخط المستقيم الذي معادلته:

$$(i)\ y = 2x - 3 \quad \rightarrow \quad m = 2$$

$$(ii)\ 2y = 2x - 3 \quad \rightarrow \quad y = \frac{2x}{2} - \frac{3}{2} = x - \frac{3}{2} \quad \rightarrow \quad m = 1$$

$$(iii)\ y + 2x = 3 \quad \rightarrow \quad y = -2x + 3 \quad \rightarrow \quad m = -2$$

$$(iv)\ 3y - 2x = 3 \quad \rightarrow \quad y = \frac{2x}{3} + \frac{3}{3} = \frac{2x}{3} + 1 \quad \rightarrow \quad m = \frac{2}{3}$$

معادلة الخط المستقيم الذي ميله m ويقطع من محور $-y$ جزءً قدره b هي:

$$y = mx + b$$

مثال:

أوجد معادلة الخط المستقيم الذي ميله 4 ويقطع من محور $-y$ جزءٍ قدره -3 هي

$$y = 4x - 3.$$

المستقيمان الموازيان والمستقيمان العموديان:

1- يتوازى المستقيمان إذا كان $m_1 = m_2$.

2- يتعامد المستقيمان إذا كان $m_1 m_2 = -1$.

أمثلة:

أوجد ميل الخط المستقيم الموازي للمستقيم الذي معادلته:

$$3y - x + 3 = 0 \quad \rightarrow \quad y = \frac{1}{3}x - 1 \quad \rightarrow \quad m_1 = \frac{1}{3}$$

وبالتالي ميل المستقيم الموازي هو:

$$m_2 = \frac{1}{3}.$$

أوجد ميل الخط المستقيم العمودي للمستقيم الذي معادلته:

$$y = 4x - 3 \quad \rightarrow \quad m_1 = 4$$

وبالتالي ميل المستقيم العمودي هو:

$$m_2 = -\frac{1}{4}.$$

الفصل الرابع

المعادلة من الدرجة الثانية في مجهول واحد:

$$ax^2 + bx + c = 0, \quad a \neq 0, b, c \in R$$

طرق حل معادلة الدرجة الثانية في مجهول واحد:

طريقة التحليل:

تعلمنا في الفصل الثاني من الباب الثاني كيفية تحليل المقدار الثلاثي إلى عامليه:

أمثلة:

أوجد جذور كل من المعادلات الآتية:

$$x^2 + 6x + 5 = 0 \quad \rightarrow \quad (x+5)(x+1) = 0 \quad \rightarrow \quad x+5 = 0 \text{ أو } x+1 = 0$$

إذاً جذور المعادلة هي: $-1, -5$.

$$x^2 - 7x + 12 = 0 \quad \rightarrow \quad (x-4)(x-3) = 0 \quad \rightarrow \quad x-4 = 0 \text{ أو } x-3 = 0$$

إذاً جذور المعادلة هي: $3, 4$.

$$x^2 + 5x - 6 = 0 \quad \rightarrow \quad (x+6)(x-1) = 0 \quad \rightarrow \quad x+6=0 \text{ أو } x-1=0$$

إذاً جذور المعادلة هي: $-6, 1$.

$$x^2 + x - 20 = 0 \quad \rightarrow \quad (x+5)(x-4) = 0 \quad \rightarrow \quad x+5=0 \text{ أو } x-4=0$$

إذاً جذور المعادلة هي: $-5, 4$.

$$x^2 - 16 = 0 \quad \rightarrow \quad (x+4)(x-4) = 0 \quad \rightarrow \quad x+4=0 \text{ أو } x-4=0$$

إذاً جذور المعادلة هي: ± 4.

$$5x^2 - 10 = 0 \quad \rightarrow \quad 5(x^2 - 2) = 0 \quad \rightarrow \quad 5\left(x+\sqrt{2}\right)\left(x-\sqrt{2}\right) = 0$$

إذاً جذور المعادلة هي: $\pm\sqrt{2}$.

$$2x^2 - x = 0 \quad \rightarrow \quad x(2x-1) = 0 \quad \rightarrow \quad x=0 \text{ أو } 2x-1=0$$

إذاً جذور المعادلة هي: $0, \frac{1}{2}$

طريقة القانون العام:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

حل معادلات الدرجة الثانيه بالقانون العام:

$$x_1, x_2 = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

أمثلة:

$$x^2 + 3x - 4 = 0 \quad \rightarrow \quad a = 1, b = 3, c = -4$$

$$x_1, x_2 = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4(1)(-4)}}{2(1)} = \frac{-3 \pm \sqrt{25}}{2} = \frac{-3 \pm 5}{2}$$

إذاً جذور المعادلة هي: $-4, 1$.

$$x^2 + x - 3 = 0 \quad \rightarrow \quad a = 1, b = 1, c = -3$$

$$x_1, x_2 = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4(1)(-3)}}{2(1)} = \frac{-1 \pm \sqrt{13}}{2}$$

إذاً جذور المعادلة هي: $\frac{-1 \pm \sqrt{13}}{2}$.

الفصل الخامس

المتراجحات الخطية:

نفترض أن a, b عددان حقيقيان بحيث أن $a \leq b$ (أو $a < b$) وتُسمى بالمتراجحة، وسوف نسرد الآن مجموعة من خصائص المتراجحات.

إذا كانت $a \leq b$ فإن لأي عدد حقيقي c يكون لدينا:

1- $a \pm c \leq b \pm c$.

2- وإذا كانت $c > 0$ فإن $ac \leq bc$ كما أن $\frac{a}{c} \leq \frac{b}{c}$

3- وإذا كانت $c < 0$ فإن $ac \geq bc$ كما أن $\frac{a}{c} \geq \frac{b}{c}$.

حل المتراجحات الخطية في مجهول واحد:

الآن سوف نطبق الخصائص السابقة لحل المتراجحات

أمثلة:

$$(i)\ 2x+1\le 2 \ \rightarrow\ 2x\le 1 \ \rightarrow\ x\le \frac{1}{2}$$

مجموعة حلول المتراجحة هي: $\left(-\infty,\frac{1}{2}\right]$.

$$(ii)\ 2x+6\le 4(x-1) \ \rightarrow\ 2x+6\le 4x-4 \ \rightarrow\ 10\le 2x \ \rightarrow\ 5\le x$$

مجموعة حلول المتراجحة هي: $[5,\infty)$.

$$(iii)\ -2x+1\le 3 \ \rightarrow\ -2x\le 2 \ \rightarrow\ 2x\ge -2 \ \rightarrow\ x\ge -1$$

مجموعة حلول المتراجحة هي: $[-1,\infty)$.