رياضيات ١١١

MATH 111

الباب الأول

الفصل الأول

المجموعات:

تعريف: المجموعة هي تجمع من أشياء مُعرَّفة تعريفاً جيداً و محددة تحديداً تاماً. و تسمى هذه الأشياء عناصر المجموعة.

نكتب $x \in X$ للتعبير عن انتماء العنصر x إلى المجموعة X فمثلاً $1 \in R$ حيث R ترمز إلى مجموعة الأعداد الحقيقية. $2 \in \{0, 1, 2, 3\}$.

المجموعة الجزئية:

يقال للمجموعة A بأنها مجموعة جزئية من المجموعة B ونكتب $A \subseteq B$ إذا كان كل عنصر في A يكون أيضاً عنصراً في B.

أمثلة:

1- دول مجلس التعاون الخليجي تكوّن مجموعة.

2- الدول العربية تكوّن مجموعة. كما أن مجموعة دول مجلس التعاون الخليجي تمثل مجموعة جزئية من مجموعة الدول العربية.

رتبة المجموعة هي عدد عناصرها ومن ثم تكون المجموعة منتهية إذا كان عدد عناصرها محدود وإلا سُميت غير منتهية.

أمثلة:

1- مجموعة الدول العربية. وهي مجموعة منتهية رتبتها " 22 "

2- المجموعة الخالية $\emptyset$ هي التي لا تحتوِي على عناصر. وهي مجموعة منتهية رتبتها "صفر" .

3- $\{a, b, c, d, e\}$ مجموعة منتهية رتبتها 5.

4- مجموعة الأعداد الطبيعية: $N = \{1, 2, 3, \dots\}$. وهي مجموعة غير منتهية.

5- مجموعة الأعداد الكلية: $W = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$. وهي مجموعة غير منتهية.

6- مجموعة الأعداد الفردية الموجبة: $\{1, 3, 5, \dots\}$. وهي مجموعة غير منتهية.

6- مجموعة الأعداد الزوجية الموجبة: $\{2, 4, 6, \dots\}$. وهي مجموعة غير منتهية.

7- مجموعة الأعداد الصحيحة: $Z = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots\}$.

8- مجموعة الأعداد الكسرية: $Q = \left\{\frac{a}{b} \mid a, b \in Z, b \neq 0\right\}$.

$$\frac{3}{5}, \frac{2}{3}, \frac{4}{3} \in Q$$

من التمثيل العشري للأعداد الكسرية

$$\frac{3}{5} = 0.6000 \ldots, \qquad \frac{2}{3} = 0.66666 \ldots, \qquad \frac{4}{3} = 1.3333333 \ldots$$

نلاحظ تكرار عددٍ ما بعد العلامة العشرية ولكأن هذا ما تتميز به الأعداد الكسرية. ومن ثم إذا كان التمثيل العشري لعدد حقيقي ليس له هذه الخاصية لا يعد هذا العدد كسرياً بل يُسمى عدداً غير كسري.

أمثلة لأعداد غير كسرية

$$\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}$$

حيث أن :

$$\sqrt{2} = 1.414213562\ldots, \qquad \sqrt{3} = 1.732050808\ldots$$

نستخدم الرمز Q' للإشارة إلى مجموعة الأعداد غير الكسرية أي أن $\sqrt{2} \in Q'$. أو أن $\sqrt{2} \notin Q$

نلاحظ أن: $N \subset W \subset Z \subset Q \subset R$

العمليات الجبرية على المجموعات:

عملية التقاطع:

نفترض أن A, B مجموعتان غير خاليتين نُعرِّف التقاطع لهما والذي يرمز له بالرمز $A \cap B$ بانها مجموعة كل العناصر المشتركة في المجموعتين.

$$A \cap B = \{x | x \in A \text{ and } x \in B\}$$

1- $\{a, b, d, g, k\} \cap \{b, k, m, r\} = \{b, k\}$

2- $\{1, 3, 5, 6, 8\} \cap \{2, 4, 6, 10\} = \{6\}$

عملية الاتحاد:

نفترض أن A, B مجموعتان غير خاليتين نُعرِّف اتحادهما والذي يرمز له بالرمز $A \cup B$ بانها مجموعة كل عناصر المجموعتين مع الأخذ في الاعتبار عدم تكرار أي عنصر.

$$A \cup B = \left\{x | x \in A \ \text{أو}\ x \in B\right\}$$

1- $\{a, b, d, g, k\} \cup \{b, k, m, r\} = \{a, b, d, g, k, m, r\}$

2- $\{1, 3, 5, 6, 8\} \cup \{2, 4, 6, 10\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10\}$

3- $Q \cup Q' = R$

عملية الفرق:

نفترض أن A, B مجموعتان غير خاليتين نُعرِّف A *فرق* B والذي يرمز إليه بالرمز $A - B$ بإنها مجموعة كل عناصر المجموعة A غير الموجودة في B. أي للحصول على $A - B$ نستبعد من المجموعة A جميع عناصرها الموجودة في B.

$$\mathbf{A - B = \{x | x \in A , x \notin B\}}$$

$$\{a, b, d, g, k\} - \{b, k, m, r\} = \{a, d, g\}$$

تُعد الفترات أهم المجموعات الجزئية من مجموعة الأعداد الحقيقية.

الفترات العددية:

لُوحِظ أن ثمة علاقة بين مجموعة الأعداد الحقيقية والخط المستقيم فيقابل كل عدد حقيقي نقطة واحدة على الخط المستقيم ولذا سُمي بخط الأعداد. نفترض أن $a < b,\ a, b \in R$ فإن مجموعة الأعداد الحقيقية التي تنحصر بين العددين $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ تُسمى فترة : أنواع الفترات،

فترة مغلقة: $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}] = \{x |\ \boldsymbol{a} \leq \boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}\}$

فترة مفتوحة: $(\boldsymbol{a}, \mathbf{b}) = \{\boldsymbol{x} | \boldsymbol{a} < \ x < b\}$

فترة شبه مغلقة: $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = \{\boldsymbol{x} |\ \boldsymbol{a} \leq \boldsymbol{x} < b\}$

فترة مغلقة غير محدودة: $[\boldsymbol{a}, \infty) = \{\boldsymbol{x} |\ \boldsymbol{x} \geq a\}$

فترة مفتوحة غير محدودة: $(-\infty, \mathbf{b}) = \{\boldsymbol{x} |\ \boldsymbol{x} < b\}$

1- $[-\mathbf{1}, \mathbf{3}] = \{\boldsymbol{x} | -\mathbf{1} \leq \boldsymbol{x} \leq \mathbf{3}\}$
2- $(\mathbf{1}, \mathbf{5}) = \{\boldsymbol{x} | \mathbf{1} < \ x < 5\}$
3- $[-\mathbf{2}, \mathbf{4}) = \{\boldsymbol{x} | -\mathbf{2} \leq \boldsymbol{x} < 4\}$
4- $(\mathbf{3}, \mathbf{7}] = \{\boldsymbol{x} | \mathbf{3} < \boldsymbol{x} \leq 7\}$
5- $[-\mathbf{3}, \infty) = \{\boldsymbol{x} |\ \boldsymbol{x} \geq -3\}$
6- $(-\infty, \mathbf{2}) = \{\boldsymbol{x} |\ \boldsymbol{x} < 2\}$
7- $(\mathbf{5}, \infty) = \{\boldsymbol{x} |\ \boldsymbol{x} > 5\}$

عملية التقاطع على الفترات:

1- $(-2,2]\cap[1,4)=[1,2]$

2- $(-\infty,2]\cap(-3,5)=(-3,2]$

3- $[-2,\infty)\cap(-5,9]=[-2,9]$

عملية الاتحاد على الفترات:

1- $(-2,2]\cup[1,4)=(-2,4)$

2- $(-\infty,2]\cup(-3,5)=(-\infty,5)$

3- $[-2,\infty)\cup(-5,9]=(-5,\infty)$

4- $(-\infty,2]\cup(-3,5)=(-\infty,5)$

عملية الفرق على الفترات:

1- $(-2,2]-[1,4)=(-2,1)$

2- $(-2,2]-[0,1)=(-2,0)\cup[1,2]$

القيمة المطلقة:

نفترض أن $a, b \in R$

$$|-a| = |a|, \quad |ab| = |a||b|, \quad \left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}, \quad |a+b| \leq |a| + |b|$$

المسافة بين العددين $a, b \in R$ $d(a,b) = |a-b|$

المسافة بين العددين 3-، 5 هي 8 $d(5,-3) = |5-(-3)| = 8$

الفصل الثاني

العمليات الجبرية على مجموعة الأعداد الحقيقية:

ترتيب إجراء العمليات الجبرية:

تعلمنا في المرحلة الابتدائية أن العمليات الجبرية على الأعداد الحقيقية تخضع لترتيب فإذا كان علينا أن نُجرِي عمليتي جمع وضرب (القسمة) فلنبدأ بالضرب (القسمة) كما سنبين من خلال الأمثلة التالية.

$$4 \times 3 + 8 = 20$$
$$27 \div 3 - 5 = 4$$
$$4 \times 2 + 64 \div 8 = 16$$

القواسم المشتركة لعددين:

العدد الأولي هو ذاك الذي لا يقبل القسمة إلا على نفسه (وبالطبع على الواحد) مثل $2, 3, 5, 7, 11, \ldots$ *فالعدد* 7 يقبل القسمة على سبعة وواحد حينئذ نقول بأن $1, 7$ عوامل أولية للعدد 7.

نفترض الآن أن $a, b \in N$ عددان طبيعيان ولإيجاد عوامل العدد الأولية (أو القواسم) نقوم بتحليله إلى أبسط عوامله كما يلي:

عوامل أو قواسم العدد 12 هي:

$$
\begin{array}{r|l}
12 & 2 \\
6 & 2 \\
3 & 3 \\
1 &
\end{array}
$$

$$\mathbf{12} = (2)(2)(3) = 2^2 3^1$$

عوامل أو قواسم العدد 18 هي:

$$
\begin{array}{r|l}
18 & 2 \\
9 & 3 \\
3 & 3 \\
1 &
\end{array}
$$

$$\mathbf{18} = (2)(3)(3) = 2^1 3^2$$

القواسم المشتركة للعددين 12, 18 هي 2, 3, 6 ومن ثم يكون القاسم المشترك الأكبر لهذين العددين هو 6 أي أن

القاسم المشترك الأكبر للعددين 12, 18 هو : $2^1 3^1 = 6$.

من المثال السابق يتبن لنا أن القاسم المشترك الأكبر لعددين هو حاصل ضرب العوامل الأولية المشتركة مرفوعة إلى أصغر أس.

مثال:

القاسم المشترك الأكبر للعددين $18, 24$

$$\begin{array}{r|l} 24 & 2 \\ 12 & 2 \\ 6 & 2 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 18 & 2 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$$

$$\mathbf{24 = (2)(2)(2)(3) = 2^3 3^1} \qquad \mathbf{8 = (2)(3)(3) = 2^1 3^2,}$$

القاسم المشترك للعددين $18,\ 24$ هو : $2^1 3^1 = 6$.

المضاعف المشترك الأصغر لعددين طبيعيين:

بعد أن نقوم بتحليل كل من العددين إلى أبسط عواملهما فإن المضاعف المشترك الأصغر لهما هو حاصل ضرب العوامل الأولية مرفوعة إلى أكبر أس.

مثال:

المضاعف المشترك الأصغر للعددين $18, 24$ هو: $2^3 3^2 = 72$

مثال:

المضاعف المشترك الأصغر للعددين $32, 20$ هو: $2^5 5^1 = 160$

الكسور :

يُسمى العدد الحقيقي $\frac{a}{b}$ حيث $a, b \in Z$ عددان صحيحان بالعدد الكسري $b \neq 0$.

الكسران المتكافئان:

يُقال بأن الكسر ين

$$\frac{2}{5} \quad , \quad \frac{8}{20}$$

متكافئان إذ أن $\frac{8}{20} = \frac{2X4}{5X4} = \frac{2}{5}$

تبسيط الكسر $\frac{3}{15}$:

نلاحظ أن العدد 3 يُمثل القاسم المشترك الأكبر لكل من البسط والمقام ولذا بقسمة كل من البسط والمقام على 3 ليُصبح الكسر في أبسط صورة: $\frac{1}{5}$

أي لتحويل الكسر إلى أبسط صورة يجب قسمة كل من البسط والمقام على القاسم المشترك لهما.

العمليات الجبرية على الكسور:

جمع وطرح الكسور:

$$\frac{2}{5}+\frac{4}{5}=\frac{6}{5}$$
$$\frac{2}{5}+\frac{3}{4}=\frac{8}{20}+\frac{15}{20}=\frac{23}{20}$$

ففي المثال الأول ولأن المقام مُوحد نقوم بجمع البسطين ، أما المثال الثاني كان يجب أولاً توحيد المقامين من خلال تحويل كل كسر إلى آخر يتكافأ معه.

ضرب وقسمة الكسور:

$$\frac{2}{5}\times\frac{4}{5}=\frac{8}{25}$$
$$\frac{2}{5}\div\frac{3}{4}=\frac{2}{5}\times\frac{4}{3}=\frac{8}{15}$$

ففي المثال الأول قمنا بضرب البسطين معاً والمقامين معاً ، أما في المثال الثاني فقد قمنا بتحويل عملية القسمة إلى ضرب مع قلب الكسر الثاني أي جعل البسط مقاماً والمقام بسطاً.

الفصل الثالث

الأسس والجذور:

القواعد العامة وتطبيقاتها:

القاعدة الأولى: $x^0 = 1$

$$\left(\frac{x^{-3}y}{z^2}\right)^0 = 1$$

القاعدة الثانية: $(xy)^m = x^m y^m, \quad , \quad (x^m)^n = x^{mn}$

$$(2x^3y^2)^3 = (2)^3(x^3)^3(y^2)^3 = 2^3x^9y^6$$

القاعدة الثالثة: $\frac{1}{y^m} = y^{-m} \, , \left(\frac{x}{y}\right)^m = \frac{x^m}{y^m}$

$$\frac{x^{-3}}{x^2} = \frac{1}{x^5} = x^{-5}$$

$$\left(\frac{x^2y^{-3}}{z^{-2}}\right)^2 = \frac{x^4z^4}{y^6}$$

$$\left(\frac{3^{-2}x^3}{Z}\right)^{-2} = \frac{3^4z^2}{x^6}$$

القاعدة الرابعة: $x^m x^n = x^{m+n}$

$$(2x^5y^4)(3x^2y^2) = 6x^7y^6$$

خواص الجذور:

$$\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$$

القواعد العامة وتطبيقاتها:

القاعدة الأولى:
$$\sqrt[n]{x^n} = \begin{cases} |x|, & n \text{ زوجي} \\ x, & n \text{ فردي} \end{cases}$$

$$\sqrt[4]{(-x)^4} = |x|$$

$$\sqrt[3]{(-x)^3} = -x$$

$$\sqrt[4]{(-3)^4} = |-3| = 3$$

$$\sqrt[3]{(-5)^3} = -5$$

القاعدة الثانية: $\sqrt[n]{xy} = \sqrt[n]{x}\ \sqrt[n]{y}$

$$\sqrt{x^2y^4} = \sqrt{x^2}\ \sqrt{y^4} = |x|y^2$$

القاعدة الثالثة: $\sqrt[n]{\frac{x}{y}} = \frac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}}$

$$\sqrt[3]{\frac{x^6}{y^3}} = \frac{x^2}{y}$$

القاعدة الرابعة: $\sqrt[n]{x^m} = x^{\frac{m}{n}}$

$$\sqrt[3]{x^2} = x^{\frac{2}{3}}$$

القاعدة الخامسة: $\sqrt[n]{\sqrt[m]{x}} = \sqrt[mn]{x}$

$$\sqrt[3]{\sqrt{5}} = \sqrt[6]{5}$$

الفصل الرابع

المقادير الجبرية:

العمليات الجبرية على المقادير الجبرية:

جمع وطرح المقادير الجبرية:

عند جمع (أو طرح) مقدارين جبريين نقوم بجمع (أو طرح) الحدود المتشابهة أي التي لها نفس الأس كما سنبين من خلال المثال التالية:

الأمثلة:

$$(i)\left(4x^2 + x - 1\right) + \left(x^2 - x + 1\right) = \left(4x^2 + x^2\right) + (x - x) + (-1 + 1) = 5x^2$$

$$(ii)\left(3x^2 - 3x + 4\right) - \left(x^2 - x + 1\right) = \left(3x^2 - x^2\right) + (-3x + x) + (4 - 1) = 2x^2 - 2x + 3$$

ضرب المقادير الجبرية:

عند ضرب مقدارين جبريين نقوم بضرب كل حد من حدود المقدار الجبري الأول في المقدار الثاني.

$$(i)\quad x(x-3y)=x\,x-3xy=x^2-3xy$$

$$(ii)\ (x+y)(x-3y)$$
$$=x(x-3y)+y(x-3y)=x^2-3xy+yx-3y^2=x^2-2xy-3y^2$$

$$(iii)\ \ (x-2\,)(\,x^2+2x+4)=x(\,x^2+2x+4)-2(\,x^2+2x+4)$$
$$=x^3+2x^2+4x-2x^2-4x-8=x^3-8$$

قسمة المقادير الجبرية:

عند قسمة مقدارين جبريين نقوم بقسمة كل حد من حدود البسط على المقدار الجبري الموجود في المقام.

$$(i)\ \frac{x+1}{x}=\frac{x}{x}+\frac{1}{x}=1+x^{-1}$$

$$(ii)\quad \frac{x^2+x}{x}=\frac{x^2}{x}+\frac{x}{x}=x+1$$

$$(iii)\quad \frac{x^2-2x+3}{x}=\frac{x^2}{x}-\frac{2x}{x}+\frac{3}{x}=x-2+3x^{-1}$$