الإحصاء ١٠١

قسم الإحصاء – كلية العلوم

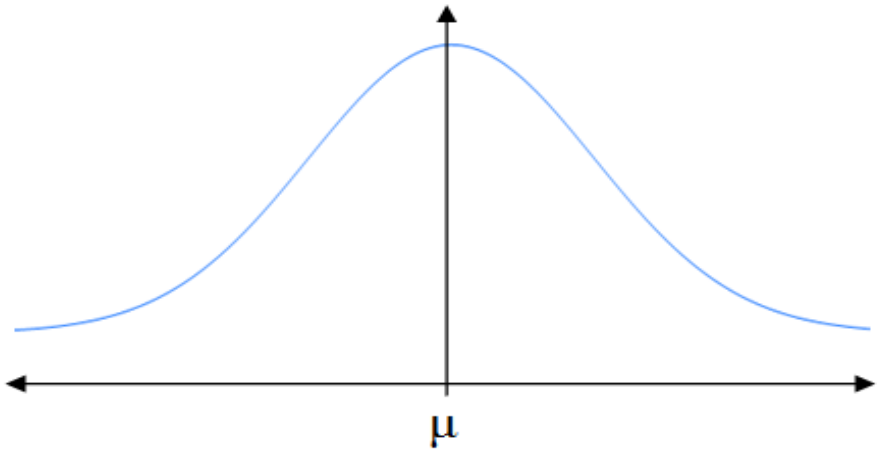
جامعة الملك عبد العزيز

البـــــــاب السابع

التوزيع الطبيعي

مقدمة:

التوزيع الطبيعي هو توزيع إحتمالي مستمر (متصل) يأخذ شكل منحنى متماثل ذو قمة واحدة ويمتد طرفاة إلى مالانهاية. (أنظر الشكل التالي).



وقد وجد أن معظم التوزيعات مثل: الأطوال – الأعمار – الدرجات ... إلخ تتبع هذا التوزيع أو قريبة منه.

خواص التوزيع الطبيعي:

- ✓ المساحة تحت المنحنى تساوي الواحد الصحيح.
- ✓ منحنى التوزيع الطبيعي **متماثل** حول متوسط التوزيع.
- ✓ للتوزيع **قمة واحدة.**
- ✓ نستنتج أن المتغير العشوائي الذي يتبع التوزيع الطبيعي يتميز بأن:

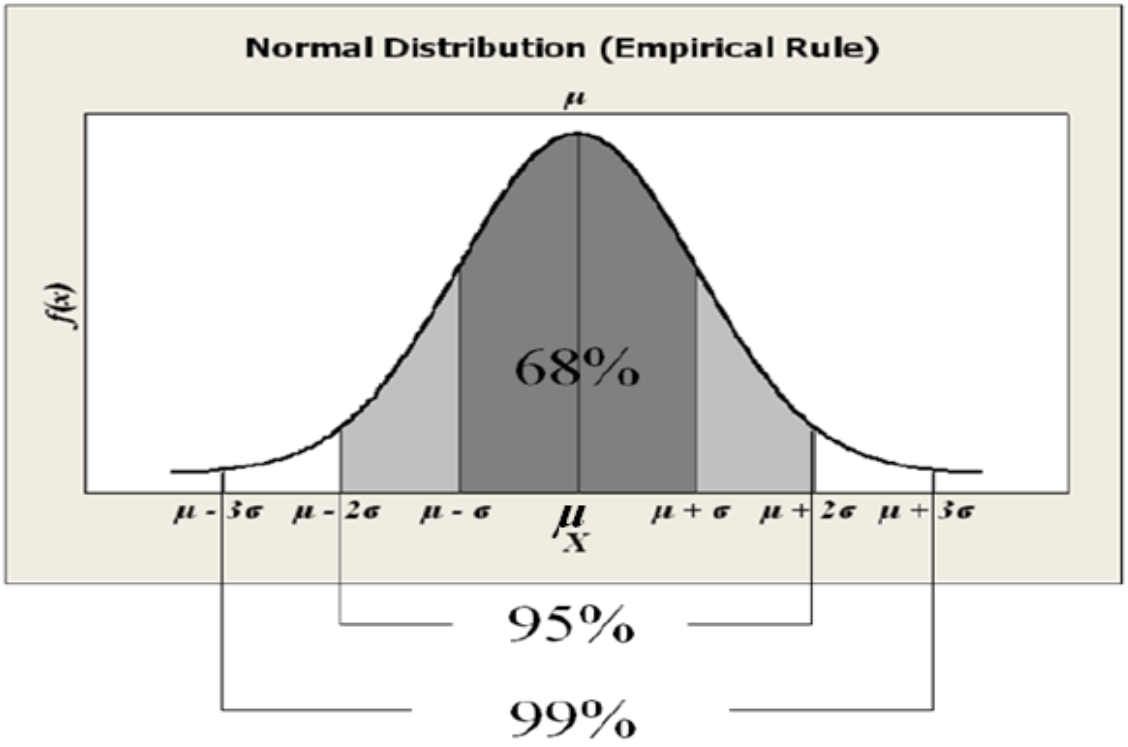
المنوال = الوسيط = الوسط

- ✓ معامل التواء التوزيع يساوي الصفر.

التوزيع الطبيعي العادي:

هو توزيع مستمر يأخذ شكل منحنى متماثل متوسطه $\mu \neq 0$ وتباينه $\sigma^2 \neq 1$

ويأخذ الشكل التالي:



❑ التوزيع الطبيعي القياسي:

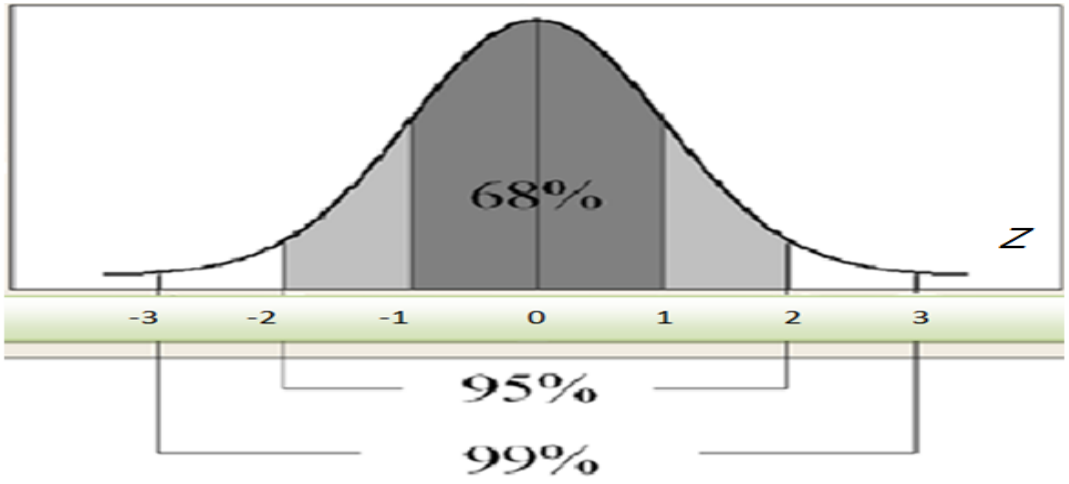
هو توزيع طبيعي متوسطه $\mu = 0$ وتباينه $\sigma^2 = 1$

ونحصل عليه من تحويل المتغير الطبيعي العادي X إلى قياسي Z، من خلال:

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

ملاحظة:

جميع خواص التوزيع الطبيعي تنطبق على التوزيع الطبيعي القياسي إلا أن القياسي متوسطه $\mu = 0$ وتباينه $\sigma^2 = 1$.



تنقسم المساحة تحت المنحنى الطبيعي العادي والقياسي إلى ثلاثة أقسام كما هو موضح بالجدول التالي:

المساحة التقريبية تحت المنحنى	تنحصر بين $(\mu-k\sigma, \mu+k\sigma)$	
	الطبيعي	الطبيعي القياسي
68 % من المساحة الكلية	$(\mu-\sigma, \mu+\sigma)$	(-1, 1)
95 % من المساحة الكلية	$(\mu-2\sigma, \mu+2\sigma)$	(-2, 2)
99.7 % من المساحة الكلية	$(\mu-3\sigma, \mu+3\sigma)$	(-3, 3)

حساب المساحة تحت منحنى التوزيع الطبيعي:

تُحسب أي مساحة تحت منحنى التوزيع الطبيعي باستخدام جدول (Z)، متبعين الخطوات التاليه:

١- إذا كانت المسألة توزيع طبيعي عادي X تحول الى قياسي Z باستخدام التحويلة:

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma}$$

٢- المساحة التي تحسب من الجدول مباشرة هي $\Phi(a)$، التي تكافئ $P(z \leq a) \equiv$

.

ملاحظة هامة:

إذا كانت المسألة ليست على الصورة المباشرة $P(z \le a) = \phi(a)$ تحول على الصورة المباشرة كما هو موضح في الجدول التالي:

- $\mathbf{P(Z \le a) = P(Z < a) = \Phi(a)}$
- $\mathbf{P(a \le Z \le b) = P(a < Z < b) = \Phi(b) - \Phi(a)}$
- $\mathbf{P(Z \ge a) = P(Z > a) = 1 - \Phi(a)}$

مثال:

لتوضيح طريقة استخدام جدول التوزيع الطبيعي القياسي نذكر الأمثلة الآتية:

1. $\Phi(0) = P(Z < 0) = 0.5000$
2. $P(Z < 1.5) = \Phi(1.5) = 0.9332$
3. $P(1 < Z < 2.4) = \Phi(2.4) - \Phi(1) = 0.9918 - 0.8413 = 0.1505$
4. $P(Z > 0.8) = 1 - \Phi(0.8) = 1 - 0.7881 = 0.2119$
5. $P(Z < -1.2) = \Phi(-1.2) = 0.1151$

تطبيقات علي الدرجة المعيارية والتوزيع الطبيعي:

الدرجة المعيارية (Z - Score):

هي درجة معيارية في توزيع متوسطه الحسابي يساو (صفراً) وانحرافه المعياري يساوي (1) وبذلك يمكن مقارنة الدرجة مع غيرها من الدرجات التي تنتمي لنفس التوزيع، وذلك بحساب الدرجة المعيارية لكل منها، ومن ثم يكون التفضيل في ضوء قيمة الدرجة المعيارية (الدرجة المعيارية الاكبر هي الافضل موقعاً بين البيانات).

ويرمز *للدرجة المعيارية بالرمز* Z *وللدرجة الخام بالرمز* X ويتم تحويل X إلى Z كما ذكرنا سابقا بالتحويلة:

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

مثال:

طالب في شعبة A علامته في مادة الإحصاء 85 وطالب آخر في شعبة B علامته في الإحصاء 80. إذا علمت أن درجات كل من الشعبتين تتبع توزيع طبيعي متوسطها وانحرافها المعياري كما يلي:

الشعبة A: $\mu=79,\ \ \sigma=6$

الشعبة B: $\mu=76,\ \ \sigma=2$

حدد أي الطالبين أداؤه وتحصيله أفضل في مادة الإحصاء مقارنة بزملائه .

الحل

للوهلة الأولى قد يظن القارئ أن تحصيل الطالب الذي في شعبة A أفضل لأن درجته أعلى حيث حصل على 85 أما الطالب الذي في شعبة B فحصل على 80 ولكن هذا الاستنتاج غير صحيح بهذه الطريقة لأنه لابد من تحويل الدرجتين التي حصل عليهما الطالبان إلى درجات معيارية ومن ثم يمكن المقارنة فالطالب الذي يحصل على درجه معيارية أعلى يكون أداؤه أفضل.

وللتحويل إلى درجات معيارية نستخدم العلاقة التالية : $Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$

الدرجة المعيارية للطالب الذي في الشعبة A:

$$\mu = 79, \quad \sigma = 6, \quad X = 85$$

$$\therefore Z = \frac{X - \mu}{\sigma} = \frac{85 - 79}{6} = 1$$

الدرجة المعيارية للطالب الذي في الشعبة B:

$$\mu = 76, \quad \sigma = 2, \quad X = 80$$

$$\therefore Z = \frac{X - \mu}{\sigma} = \frac{80 - 76}{2} = 2$$

ومن مفهوم الدرجة المعيارية نستنتج أن الطالب الذي في الشعبة B أداؤه أفضل من الطالب الذي في الشعبة A لأن الدرجة المعيارية له تساوي 2 وهي أعلى من الدرجة المعيارية للطالب الذي في الشعبة A بالرغم من أن درجة الطالب في الشعبة A (وهي 85 درجة) أعلى من درجة الطالب في الشعبة B (وهي 80 درجة) وقد يكون هذا راجعا إلى أن أسئلة اختبار الشعبة A أسهل من الشعبة B أو بسبب اختلاف المدرس أو طريقة التدريس أو لأي سبب آخر.

مثال:

إذا كان دخل (1000)أسرة في مدينة ما يتبع توزيعاً طبيعياً متوسطه(μ) 1800 ريال وانحرافه المعياري (σ) 300 ريال. أوجد:

١. احتمال الحصول على دخل أسرة أكبر من 2400ريال.

٢. احتمال الحصول على دخل أسرة أقل من 2550ريال.

٣. احتمال الحصول على دخل أسرة ينحصر بين 1650 و2250 ريال.

٤. أوجد عدد الأسر التي يزيد دخلها عن 2400ريال.

الحل:

نفرض أن (X) هو دخل الأسرة. المتغير(X) متغير عشوائي مستمر يتبع توزيع طبيعي عادي بمتوسط (μ) يساوي 1800 ريال، وانحراف المعياري (σ) يساوي 300 ريال.

١.

$$P(X > 2400) = P(\frac{X-\mu}{\sigma} > \frac{2400-1800}{300})$$
$$= P(Z > 2) = 1 - P(Z < 2)$$
$$= 1 - \Phi(2) = 1 - 0.9772 =$$
$$= 0.0228$$

٢.

$$P(X < 2550) = P(\frac{X-\mu}{\sigma} < \frac{2550-1800}{300})$$
$$= P(Z < 2.5) =$$
$$= \Phi(2.5) = 0.9938$$

٣.

$$P(1650 < X < 2550) = P(\frac{1650-1800}{300} < \frac{X-\mu}{\sigma} < \frac{2550-1800}{300})$$
$$= P(-0.5 < Z < 1.5)$$
$$= \Phi(1.5) - \Phi(-0.5)$$
$$= 0.9332 - 0.3085$$
$$= 0.6247$$

٤.

عدد الاسر التي يزيد دخلها عن 2400ريال = $P(X>2400)$ × عدد الأسر الكلي

$= 1000 \times 0.0228$

= ٢٢,٨ ≈ ٢٣ أسرة

توزيعات المعاينة:

مجتمع المتوسطات الحسابية للعينات:

يعتمد شكل ونوع التوزيع الاحتمالي لمجتمع المتوسطات الحسابية للعينات العشوائية على توزيع المجتمع الأصلي الذي اختيرت منه هذه العينات العشوائية، والنظرية الآتية تعطي التوزيع الاحتمالي لمجتمع المتوسطات الحسابية للعينات العشوائية الكبيرة.

نظرية النهاية المركزية

إذا كان لدينا مجتمع غير محدود مفرداته (X) تتبع توزيعاً احتمالياً متوسطه μ وانحرافه المعياري σ. سحبنا من هذا المجتمع عينات عشوائية حجم كل منها (n)، وكانت (n) كبيرة الحجم $(n \geq 30)$. فإن الوسط الحسابي $\overline{X}$ لهذه العينات يتبع تقريباً توزيعاً طبيعياً له الخصائص التالية:

$$\mu\left(\overline{X}\right) = \mu, \quad \sigma\left(\overline{X}\right) = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

إذا كانت قيمة σ مجهولة
نستخدم بدلها S

وبالتالي فإنه لتحويل $\bar{X}$ إلى Z نستخدم التحويلة:

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu(\bar{X})}{\sigma(\bar{X})}$$

مثال:

إذا كان بدل السكن المعطى للموظف شهرياً ضمن الراتب بإحدى الشركات يتبع توزيعاً طبيعياً متوسطه μ = (170)ريال وانحرافه σ = (8) ريال.

١ـ اخترنا موظفاً عشوائياً فما احتمال أن يقل بدل سكنه عن 166 ريال؟

٢ـ سحبت عينة من (64)موظف. فما هو احتمال أن يكون متوسط بدل سكنهم أكبر من 172ريال؟

الحل:

١ـ

$$P(X<166)=P\left(\frac{X-\mu}{\sigma}<\frac{166-170}{8}\right)$$

$$=P(Z<-0.5)$$

$$=\Phi(-0.5)$$

$$=0.3085$$

-٢

$$P(\overline{X} > 172) = P\left(\frac{\overline{X} - \mu(\overline{X})}{\sigma(\overline{X})} > \frac{172 - 170}{8/\sqrt{64}}\right)$$

$$= P(Z > 2) = 1 - P(Z < 2)$$

$$= 1 - \Phi(2) = 1 - 0.9772$$

$$= 0.0228$$