إحصاء ١١١

STAT 111

قسم الإحصاء – كلية العلوم

جامعة الملك عبد العزيز

البـــــــاب الســــــادس

مقدمة في الإحتمـــــــــالات والتوزيعــــات الإحتمــــــاليــــة

تعاريف اساسية:

التجربة العشوائية

هي أي إجراء نعلم مسبقا جميع النواتج الممكنة له وان كنا لا نستطيع أن نتنبأ بأي من هذه النتائج سيتحقق فعلاً.

فراغ العينة

هو المجموعة المكونة من جميع النتائج الممكنة من تجربة عشوائية. ويرمز له بالرمز (S).

مثال:

عند إلقاء قطعة نقود متوازنة مرة واحدة فما هو فراغ العينة؟

الحل:

نجد أن النتائج الممكنة أو فراغ العينة لهذه التجربة هي:

صورة: وسنرمز لها بالرمز H

كتابـــة: وسنرمز لها بالرمز T

فإن مجموعة النتائج لهذه التجربة أي فراغ العينة لهذه التجربة هو:

$$\mathrm{S} = \{H, T\}$$

مثال:

عند إلقاء قطعتي نقود مرة واحدة (أو قطعة نقود واحدة مرتين)

ما هو فراغ العينة؟

الحل:

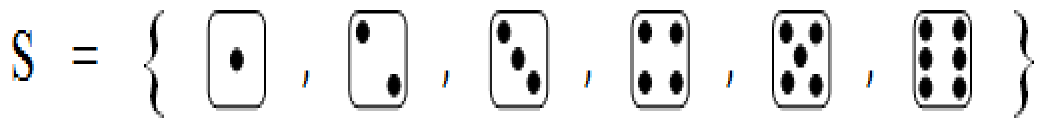
مجموعة النتائج لهذه التجربة أي فراغ العينة لهذه التجربة هو:

$$S = \{HH, HT, TH, TT\}$$

مثال:

عند إلقاء زهرة نرد متزنة مرة واحدة، ما هو فراغ العينة؟

الحل:



$$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

الحادثة

هي مجموعة جزئية من فراغ العينة

أنواع الحادثة:

الحادثة

- **البسيطة**: هي الحادثة التي تتكون من عنصر واحد من عناصر فراغ العينة
- **المركبة**: هي الحادثة التي تحتوي على أكثر من عنصر من عناصر فراغ العينة.
- **المؤكدة**: هي الحادثة التي لابد من وقوعها، أي عناصره كل عناصر فراغ العينة S
- **المستحيلة**: هي الحادثة المستحيل وقوعها ويرمز لها بالرمز $\emptyset$

مثال:

عند إلقاء زهرة نرد متزنة مرة واحدة، حدد الحوادث التاليه وأنواعها، إذا علمت أن فراغ العينة للتجربة هو:

$$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

وصف الحادثة	الحادثة	نوع الحادثة
ظهور عدد أكبر من ٥	$\{6\}$	بسيطة
ظهور عدد فردي	$\{1, 3, 5\}$	مركبة
ظهور عدد أصغر من ٧	$\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$	مؤكدة
ظهور عدد أكبر من ٦	$\varnothing$	مستحيلة

علاقات الحوادث مع بعضها البعض:

١. الحوادث المتماثلة:

هي تلك الحوادث التي يكون لها نفس فرصة الحدوث

مثال:

* عند إلقاء قطعة نقود متزنة مرة واحدة فإن فرصة ظهور الكتابة تماثل فرصة ظهور الصورة.

* عند إلقاء زهرة نرد متزنة مرة واحدة فإن فرصة الحصول على أحدى الأوجه تكون متساوية.

٢. الأحداث المتنافية (المانعة) بالتبادل:

إذا كان هناك حدثان A وB، وكان وقوع الحدثين معاً حدثاً مستحيلاً وهذا يعني أن الحدثين لا يمكن أن يقعا معاً أو وقوع أحدهما يمنع وقوع الآخر فإنه يُقال أن A, B حدثان مانعان أو متنافيان بالتبادل، (لا يوجد عناصر مشتركة بينهما).

مثال:

تمثل الأحداث التالية أحداث مانعة:

- ✓ عند إلقاء قطعة نقود مرة واحدة فإن ظهور الكتابة يمنع ظهور الصورة.
- ✓ عند إلقاء زهرة نرد متزنة بطريقة غير متحيزة مرة واحدة فإن ظهور أحد الأوجه يمنع ظهور الأوجه الأخرى.

٣. الاحداث المستقلة

لو أن لدينا حدثان وكان وقوع أحدهما لا يؤثر ولا يتأثر بوقوع الاخر فيقال أن الحدثين مستقلان.

مثال:

عند إلقاء زهرتي نرد فإن ظهور رقم ما على الزهرة الأولى لا يؤثر ولا يتأثر بما ظهر على القطعة الثانية.

طرق العد:

عدد الطرق التي يمكن بها اختيار (x)من الأشياء من بين (n)من هذه الأشياء (الترتيب غير مهم)هو:

$$\binom{n}{x} = C_x^n = \frac{n!}{x!\,(n-x)!}, \qquad x \le n$$

حيث:

$$n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \ldots \times 2 \times 1$$

$$4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$$

مثال:

بكم طريقة يمكن اختيار رجلين من بين أربع رجال؟

الحل :حيث أن $x = 2$ من الرجال من بين $n = 4$

$$\binom{4}{2} = C_2^4 = \frac{4!}{2!(4-2)!} = \frac{4!}{2!2!} = \frac{4\times3\times2\times1}{(2\times1)\times(2\times1)} = \frac{24}{4} = 6$$

يمكن استخدام التوافيق لحساب **عدد** مرات إجراء تجربتين معاً كما يلي :إذا كان لدينا تجربة ما تقع بطرق عددها (H) طريقة، تجربة أخرى تقع بطرق عددها (L) طريقة . فإن عدد مرات إجراء التجربتين معاً يساوي: $\boldsymbol{H\times L}$

وأوضح مثال على ذلك زهرتي النرد إذا القيتا معاً فإن الحالات الكلية لهما تساوي

٦×٦=٣٦

مثال:

أعلنت إحدى الشركات عن توفر ثلاث وظائف شاغرة للرجال ووظيفتين للنساء، بكم طريقة يمكن الاختيار إذا كان عدد المتقدمين ست رجال وخمس نساء.

الحل:

عدد طرق اختيار الرجال :

$$H = C_3^6 = \frac{6!}{3!3!} = 20$$

عدد طرق اختيار النساء:

$$L = C_2^5 = \frac{5!}{2!3!} = 10$$

∴ عدد طرق الاختيار الكلي:

$H \times L = 20 \times 10 = 200$ طريقة

ملاحظة هامة:

$(i)\ a^0 = 1$ عدد لا يساوي الصفر $= a$

$(ii)\ 0! = 1$

$(iii)\ C_0^n = 1$

$(iv)\ C_n^n = 1$

(v) مجموع الاحتمالات لأي حدث يساوي 1

تعريف الاحتمال:

يوجد للاحتمال عدة تعاريف أهمها التعريف القديم (الكلاسيكي) والتجريبي والرياضي.

1. التعريف القديم (الكلاسيكي) للاحتمال

إذا كان عدد الطرق التي يمكن أن تظهر بها نتائج تجربة ما هو n طريقة وكانت هذه النتائج لها نفس فرصة الظهور وكان من بينها m طريقة تظهر بها حادثة ما. فإنه يقال إن احتمال وقوع الحادثة هو $\frac{m}{n}$.

وإذا رمزنا للحادثة بالرمز A فإن $P(A)$ احتمال وقوع الحادثة A عبارة عن عدد الحالات المواتية للحادثة A مقسوماً على عدد الحالات الكلية أي أن

$$P(A) = \frac{m}{n}, \qquad m \leq n$$

مثال:

إذا كانت لديك عشر بطاقات مرقمة من الرقم (1) حتى (10) موضوعة على طاولة بشكل عشوائي ومقلوبة، ثم سحبت إحدى هذه البطاقات

أ. ما احتمال الحصول على بطاقة تحمل الرقم (4)؟

ب. ما احتمال الحصول على بطاقة تحمل رقم يقبل القسمة على (3)؟

الحل:

أ. فراغ العينة في هذه الحالة هي الأرقام من (1) حتى (10)، أي أن لدينا فراغ عينة ذو عشر عناصر [$n = 10$]، بالتالي احتمال الحصول على بطاقة تحمل الرقم (4) (ولنرمز لهذه الحادثة بالرمز A) هو:

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{1}{10} = \mathbf{0.1}$$

الحصول على بطاقة تحمل رقم يقبل القسمة على (3) تكون عند ظهور أحد ثلاثة أرقام 3 أو 6 أو 9 أي أن $m = 3$، فإذا رمزنا لهذه الحادثة بالرمز B فإن :

$$P(B) = \frac{m}{n} = \frac{3}{10} = \mathbf{0.3}$$

مثال:

ألقيت زهرة نرد متزنة مرة واحدة فما احتمال ظهور:

أ. عدد فردي. ب. عدد زوجي. ج. عدد أقل من ٥. د. عدد أكبر من ٦.

الحـــــل:

علمنا مما سبق أن فراغ العينة لإلقاء زهرة النرد هو:

$$S=\{ 1, 2, 3, 4, 5, 6 \}$$

من الملاحظ أن الطرق التي يمكن أن يظهر بها الوجه العلوي هو $n = 6$، ولنعتبر أن:

A: يمثل حدث ظهور عدد فردي.

B: يمثل حدث ظهور عدد زوجي.

C: يمثل عدد أقل من ٥.

D: يمثل عدد أكبر من ٦.

أ. عدد الطرق التي يمكن أن يظهر بها على الوجه العلوي عدداً فردياً (الحادثة A) هو $m= 3$، وبهذا يكون احتمال ظهور عدد فردي يساوي:

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

ب. عدد الطرق التي يمكن أن يظهر بها على الوجه العلوي عدد زوجي (الحادثة B) هو $m = 3$، وبهذا يكون احتمال ظهور عدد زوجي يساوي:

$$P(B) = \frac{m}{n} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

ج. عدد الطرق التي يمكن أن يظهر بها على الوجه العلوي عدد أقل من ٥، وهو أن يكون الوجه العلوي ٤ أو ٣ أو ٢ أو ١، وبهذا يكون احتمال الحادثة C هو:

$$P(C) = \frac{m}{n} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

د. عدد الطرق التي يمكن أن يظهر بها على الوجه العلوي عدداً أكبر من ٦ يساوي 0، لأن الحادثة مستحيلة، وبهذا يكون احتمال الحادثة D هو:

$$P(D) = \frac{m}{n} = \frac{0}{6} = 0$$

ملاحظات هامة

- احتمال أي حدث محصور بين ١ و الصفر،

$$0 \le P(A) \le 1$$

- احتمال أي حادثة مؤكدة يساوي ١.

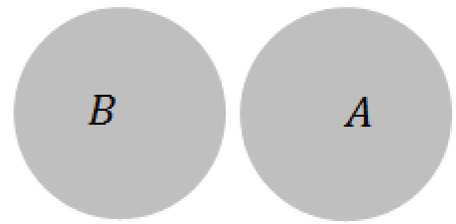
$$P(S) = 1$$

- احتمال أي حادثة مستحيلة يساوي صفر.

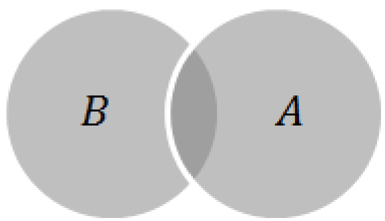
$$P(\phi) = 0$$

بعض قوانين الاحتمالات:

أ. الأحداث المانعة وغير المانعة:



حدثان مانعان



حدثان غير مانعان

** <u>لحساب احتمال وقوع حدثان مانعان نستخدم القانون التالي:</u>

$$P(A \text{ or } B) = P(A) + P(B)$$

** <u>لحساب احتمال وقوع حدثان غير مانعان نستخدم القانون التالي:</u>

$$P(A \text{ or } B) = P(A) + P(B) - P(A \text{ and } B)$$

مثال:

ألقيت زهرة نرد (طاولة) متزنة مرة واحدة، ما إحتمال ظهور الرقم ٢ أو عدد فردي:

الحل:

A: ظهور الرقم ٢

B: ظهور عدد فردي

A، B حدثان مانعان

$$P(A or B) = P(A) + P(B)$$

$$= \frac{1}{6} + \frac{3}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

مثال:

ألقيت زهرة نرد (طاولة) متزنة مرة واحدة، ما إحتمال ظهور عدد يقبل القسمة على ٢ أو على ٣:

الحل:

A: ظهور عدد يقبل القسمة على ٢، وهي { ٢, ٤, ٦ }

B: ظهور عدد يقبل القسمة على ٣، وهي { ٣, ٦ }

A، B: حدثان غير مانعان

$$P(A or B) = P(A) + P(B) - P(A and B)$$

$$= \frac{3}{6} + \frac{2}{6} - \frac{1}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

ب. الأحداث المستقلة

لحساب احتمال وقوع حدثين مستقلان نستخدم القانون التالي:

$$P(A \text{ and } B) = P(A)P(B)$$

مثال:

ألقيت قطعتا نرد مرة واحدة. فما احتمال ظهور ٣ على القطعة الأولى و ٤ على القطعة الثانية؟

الحل:

بفرض أن:

A: ظهور ٣. B: ظهور ٤.

ومن الواضح أن الحدثين مستقلان، أي أن:

$$P(A and B) = P(A) \times P(B) = \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$$

مثال:

إذا كان إحتمال إرتفاع مؤشر سوق الأسهم بالدولة (A) يساوي ٠.٨، وإحتمال إرتفاع مؤشر سوق الأسهم بالدولة (B) يساوي ٠.٩. فما إحتمال أن يرتفع مؤشر الأسهم في الدولتين A و B؟

الحل:

A: إرتفاع مؤشر سوق الأسهم بالدولة (A)

B: إرتفاع مؤشر سوق الأسهم بالدولة (B)

A، B: حدثان مستقلان

$$P(A and B) = P(A) \times P(B) = 0.8 \times 0.9 = 0.72$$

مثال:

اختير طالب عشوائياً من عينة مكونة من 100 طالب من كلية الاقتصاد والإدارة فكان منهم من قسم المحاسبة ومنهم من قسم التسويق، كانوا يدرسوا دورات تدريبية لغة إنجليزية وحاسب آلي، كما موضح بالجدول التالي:

	لغة إنجليزية E	حاسب C	المجموع
محاسبة A	٢٠	٣٠	٥٠
تسويق M	٤٠	١٠	٥٠
المجموع	٦٠	٤٠	١٠٠

أوجد الاحتمالات الآتية:

أ. احتمال أن يدرس الطالب حاسب آلي (C).

ب. احتمال أن يكون الطالب من قسم التسويق.

جـ. احتمال أن يدرس الطالب لغة إنجليزية أو يكون من قسم المحاسبة.

د. احتمال أن يدرس الطالب حاسب آلي و أن يكون من قسم المحاسبة.

الحل:

أ. احتمال أن يدرس الطالب حاسب آلي (C).

$$P(C)=\frac{40}{100}=0.4$$

ب. احتمال أن يكون الطالب من قسم التسويق.

$$P(M)=\frac{50}{100}=0.5$$

جـ. احتمال أن يدرس الطالب لغة إنجليزية أو يكون من قسم المحاسبة.

$$P(E \text{ or } A)=P(E)+P(A)-P(E \text{ and } A)$$

$$=\frac{60}{100}+\frac{50}{100}-\frac{20}{100}=\frac{90}{100}=0.9$$

د. احتمال أن يدرس الطالب حاسب آلي و أن يكون من قسم المحاسبة.

$$P(C \text{ and } A)=P(C)\times P(A)$$

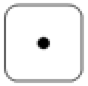
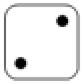
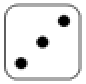
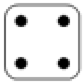
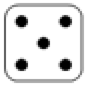
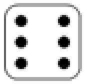
$$=\frac{40}{100}\times\frac{50}{100}=0.2$$

المتغيرات العشوائية والتوزيعات الاحتمالية:

المتغير العشوائي:

هو المقدار الذي يأخذ قيماً رقمية مختلفة والتي تعبر عن نتائج التجربة العشوائية.

فمثلاً عند إلقاء زهرة نرد مرة واحدة، التجربة هنا عشوائية ونتائجها هي:

نتائج التجربة						
X	1	2	3	4	5	6

أنواع المتغيرات العشوائية:

متغير عشوائي منفصل	متغير عشوائي متصل
• إذا كان يأخذ قيماً تنتمي إلى مجموعة محدودة أو معدودة. مثل عدد مرات غياب الطلاب.	• إذا كان يأخذ جميع القيم الصحيحة والكسرية في مدى تغيره، أو كان ينتمي إلى مجموعة غير محدودة أو معدودة. مثل: أسعار السيارات.

التوزيعات الاحتمالية المنفصلة:

عبارة عن دالة توضح احتمالات معينة لقيم المتغير العشوائي المنفصل، وهذه الدالة يعبر عنها بجدول أو صيغة رياضية تبين قيم المتغير والاحتمالات المقابلة لكل منها.

ويقال أن للمتغير العشوائي المنفصل X **توزيعاً احتمالياً منفصلاً** $P(x)$ إذا حقق هذا التوزيع الشروط التالية:

(1) $P(x) \geq 0$ لجميع قيم X

(2) $\sum P(x) = 1$

خصائص أساسية للتوزيع الاحتمالى المنفصل:

١. توقع التوزيع (التوقع الرياضي أو متوسط التوزيع):

$$E(X) = \mu = \sum x\, P(x)$$

٢. تباين التوزيع

$$\operatorname{var}(X) = \sigma^2 = \sum x^2 P(x) - \mu^2$$

٣. الإنحراف المعياري

$$\sqrt{\operatorname{var}(X)} = \sigma = \sqrt{\sigma^2}$$

مثال

إذا كان التوزيع الاحتمالي المنفصل للمتغير X هو كما يلي:

X	٢	٤	٥	٦
P(x)	٠,١	*0.3*	*k*	*0.2*

أ. ما هي قيمة الثابت (k) المناسبة؟

ب. أوجد المتوسط والانحراف المعياري للتوزيع؟

الحل:

أ. حيث أن مجموع الاحتمالات لابد وأن يساوي الواحد، لذا:

$$\sum P(x) = 1$$
$$\Rightarrow 0.1 + 0.3 + k + 0.2 = 1$$
$$\Rightarrow 0.6 + k = 1$$
$$\Rightarrow k = 1 - 0.6 = 0.4$$

ب. يمكن حساب المتوسط والانحراف المعياري للتوزيع كالتالي:

X	2	4	5	6	$\sum$
$P(x)$	0.1	0.3	0.4	0.2	1
$x \cdot P(x)$	0.2	1.2	2.0	1.2	4.6
$x^2 \cdot P(x)$	0.4	4.8	10.0	7.2	22.4

- المتوسط:

$$\mu = \sum x.P(x) = 4.6$$

- التباين:

$$\sigma^2 = \sum [x^2.P(x)] - \mu^2$$
$$= 22.4 - (4.6)^2$$
$$= 22.4 - 21.16 = 1.24$$

- الانحراف المعياري:

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{1.24} \quad = 1.11$$

بعض التوزيعات الاحتمالية المنفصلة:

- توزيع ذو الحدين:

إذا كان لدينا تجربة ما تتكرر (n)مرة، وكان احتمال ظهور حدث ما (النجاح)هو p، و احتمال عدم ظهور الحدث(الفشل)هو q، فإن احتمال ظهور الحدث (X) مرة من بين التكرار n، يتبع توزيع ذي الحدين الذي دالته الاحتمالية:

$$P(x)=C_x^n p^x q^{n-x}=\frac{n!}{x!\,(n-x)!}\,p^x\,q^{n-x} \quad , \quad x=0,1,2,\ldots,n$$

مواصفات التوزيع:

- توزيع منفصل يستخدم في حالة الأحداث المستقلة. ويتوقف على قيمة الاحتمال.
- $\sum P(x) = \sum C_x^n p^x q^{n-x} = 1$
- $p + q = 1$

خصائص التوزيع: يمكن إيجاد الخصائص مباشرة من المسألة حتى قبل حساب التوزيع الاحتمالي، وهذه الخصائص على النحو التالي:

- المتوسط: $\mu = np$
- التباين: $\sigma^2 = npq$
- الانحراف المعياري: $\sigma = \sqrt{npq}$

مثال:

إذا كان احتمال ارتفاع مؤشر سوق الأسهم هو (3/4) اختيرت ثلاث دول. أوجد:

- التوزيع الاحتمالي لعدد الدول التي يرتفع مؤشر سوق أسهمها.
- متوسط التوزيع وتباينه وانحرافه المعياري.
- احتمال ارتفاع مؤشر سوق الأسهم لدولتين على الأقل.

الحل:

$$n=3 \qquad p=\frac{3}{4} \qquad q=1-p=1-\frac{3}{4}=\frac{1}{4}$$

X (الحدث): ارتفاع مؤشر سوق الأسهم بدولة.

X: متغير عشوائي منفصل يأخذ القيم $0, 1, 2, 3$، ويتبع توزيع ذي الحدين الذي دالته الاحتمالية:

$$P(x)=C_x^n p^x q^{n-x}=C_x^3\left(\frac{3}{4}\right)^x\left(\frac{1}{4}\right)^{3-x} \qquad x=0,1,2,3$$

- التوزيع الاحتمالي لعدد الدول التي يرتفع مؤشر سوق أسهمها

$$P(X=0)=P(0)=C_0^3\left(\frac{3}{4}\right)^0\left(\frac{1}{4}\right)^3=1\times1\times\frac{1}{64}=\frac{1}{64}$$

$$P(X=1)=P(1)=C_1^3\left(\frac{3}{4}\right)^1\left(\frac{1}{4}\right)^2=3\times\frac{3}{4}\times\frac{1}{16}=\frac{9}{64}$$

$$P(X=2)=P(2)=C_2^3\left(\frac{3}{4}\right)^2\left(\frac{1}{4}\right)^1=3\times\frac{9}{16}\times\frac{1}{4}=\frac{27}{64}$$

$$P(X=3)=P(3)=C_3^3\left(\frac{3}{4}\right)^3\left(\frac{1}{4}\right)^0=1\times\frac{27}{64}\times1=\frac{27}{64}$$

$$\sum P(x)=\frac{1}{64}+\frac{9}{64}+\frac{27}{64}+\frac{27}{64}=\frac{64}{64}=1$$

- متوسط التوزيع وتباينه وانحرافه المعياري

$$\mu=np=3\times\frac{3}{4}=2.25$$

$$\sigma^2=npq=3\times\frac{3}{4}\times\frac{1}{4}=\frac{9}{16}\quad,\quad\sigma=\sqrt{\sigma^2}=\sqrt{\frac{9}{16}}=0.75$$

- احتمال ارتفاع مؤشر سوق الأسهم لدولتين على الأقل ($X=2$ أو $X=3$)

$$P(X\ge2)=P(X=2)+P(X=3)=\frac{27}{64}+\frac{27}{64}=\frac{54}{64}$$