إحصاء ١١١

STAT 111

قسم الإحصاء – كلية العلوم

جامعة الملك عبد العزيز

البـــاب الثالث

المقاييس الإحصائية الوصفية

المقاييس الإحصائية

مقاييس النزعة المركزية أو المتوسطات

هى قيم مركزية تتمركز او تتوزع حولها البيانات.

مقاييس التشتت

هى قيم تدل على درجة تقارب او تباعد البيانات عن المتوسط.

مقاييس النزعة المركزية

١- الوسط الحسابي:

يعرف الوسط الحسابي لمجموعة من البيانات، بأنه حاصل جمعها مقسوماً على عددها، يرمز للوسط الحسابي بالرمز μ ليمثل متوسط المجتمع أو $\bar{x}$ ليمثل الوسط الحسابي للعينة. ويتم حسابه لبيانات العينة في حالة البيانات الغير مبوبة كما يلي:

$$\bar{x} = \frac{\sum x}{n}$$

حيث ان n: حجم العينة.

مثال:

احسب الوسط الحسابى للأجور اليومية بالدولار للعينة التالية المكونة من خمس عمال بإحدى ألقطاعات:

60 90 80 70 50

الحل:

$$\bar{x} = \frac{\sum x}{n} = \frac{(50+70+80+90+60)}{5} = \frac{350}{5} = 70\$$$

٢- الوسيط:

هو القيمة التي تقسم البيانات إلى قسمين متساويين بعد ترتيبها تصاعدياً او تنازلياً. ويرمز له بالرمز(m). ويعرف كذلك بأنه مقياس الموقع لأن قيمته تعتمد على موقعه في البيانات.

ويتم حساب الوسيط على النحو التالي:

١- ترتب البيانات تصاعديا أو تنازليا.

٢- نحدد قيمة الوسيط حيث:

إذا كان عدد البيانات فردي:

الوسيط هو القيمة التي تقع في منتصف البيانات.

إذا كان عدد البيانات زوجي:

الوسيط هو القيمة التي تقع بين القيمتين الواقعتين في المنتصف، حيث نجمعهم ونقصم على ٢ فنحصل على الوسيط.

مثال:

احسب وسيط الأجور اليومية بالدولار للبيانات الآتية والتي تمثل عينتين من العمال مختارتين من شركتين مختلفتين:

العينة (1) : 50 70 80 90 60

العينة (2) : 50 70 80 90 60 100

الحل:

العينة (1)

1- نرتب القيم تصاعديا فتصبح

50 60 70 80 90

2- عدد البيانات فردي، إذاً:

m

50 60 70 80 90

العينة (2)

١- نرتب القيم تصاعديا فتصبح

50 60 70 80 90 100

2- عدد البيانات زوجي، إذاً:

50 60 70 (m) 80 90 100

$$m = \frac{70+80}{2} = 75 \ \$$$

٣- المنوال:

هو المفردة التي تتكرر أكثر من غيرها (القيمة الاكثر تكراراً) ويرمز له بالرمز D

مثال:

البيانات الآتية تمثل تقديرات 10 طلاب فى المدخل الى علم النفس:

D C D B A C D F D F

اوجد منوال التقديرات لهؤلاء الطلاب.

الحل:

المنوال = D (بيانات لها منوال واحد)

مثال:

البيانات التالية تمثل نتائج اختبار موحد في مادة الإحصاء لعينات من طلاب سبع شعب، أوجد المنوال لكل شعبة:

رقم الشعبة	نتائج الطلاب في مادة الإحصاء
1	2 , 3 , 4 , 5 , 10 , 3 , 6 , 3
2	5 , 10 , 7 , 3 , 9 , 11
3	3 , 3 , 4 , 5 , 5 , 6
4	3 , 3 , 2 , 2 , 5 , 5 , 10 , 10
5	13 , 14 , 13 , 15 , 14 , 19 , 21
6	20 , 20 , 22 , 16 , 20 , 22 , 16 , 16 , 22
7	0 , 2 , 8 , 8 , 0 , 9 , 10 , 10

الحل:

رقم الشعبة	المنوال
1	3
2	لا يوجد منوال
3	3 و5
4	لا يوجد منوال
5	13 و14
6	لا يوجد منوال
7	0 و8 و10

٤- المتوسط المرجح:

هو مجموع حواصل ضرب قيم مفردات العينة فى أوزان مخصصة لكل منها، مقسوماً على مجموع هذه الاوزان، ويرمز له بالرمز ($\overline{x}_w$).

$$\overline{x}_w = \frac{w_1x_1 + w_2x_2 + \ldots + w_nx_n}{w_1 + w_2 + \ldots + w_n} = \frac{\sum w_ix_i}{\sum w_i}$$

حيث $x_1, x_2, \ldots, x_n$ هى قيم العينة, و التى لها الاوزان $w_1, w_2, \ldots, w_n$

مثال:

أوجد المتوسط المرجح لدرجات أحد الطلاب فى ثلاث مقررات بأحد الفصول الدراسية حيث كانت درجاته هى 40 , 70 , 50 وكانت الساعات المعتمدة هى 2 ,3, 4على الترتيب.

الحل:

$$\overline{x_w} = \frac{\sum w.x}{\sum w} = \frac{(2)(40)+(3)(70)+(4)(50)}{2+3+4} = 54.4$$ درجة

مزايا وعيوب الوسط الحسابي

مزاياه

- سهولة حسابه والتعامل معه جبرياً
- تدخل جميع القيم في حسابه

عيوبه

- يتأثر بالقيم الشاذة (المتطرفة)
- لا يمكن إيجاده للبيانات الوصفية
- لا يمكن إيجاده بالرسم

مزايا وعيوب الوسيط

مزاياه

- سهولة حسابه والتعامل معه جبرياً
- لا يتأثر بالقيم الشاذة
- يمكن إيجاده بالرسم

عيوبه

- لا تدخل جميع القيم في حسابه أو إيجاده
- لا يمكن إيجاده للبيانات الاسمية

مزايا وعيوب المنوال

مزاياه

- سهولة حسابه
- لا يتأثر بالقيم الشاذة
- مقياس النزعة المركزية الوحيد الذي يمكن حسابه للبيانات الاسمية
- يمكن إيجاده بالرسم

عيوبه

- لا تدخل جميع القيم في حسابه أو إيجاده

مقاييس التشتت

١ـ المدى:

هو الفرق بين أكبر قيمة وأقل قيمة من البيانات، ويرمز له بالرمز (R).

مثال:

البيانات الآتية تمثل أسعار سهم شركة معينة خلال خمسة أيام بالريال السعودي:

60 90 80 70 40

احسب المدى.

الحل:

$R = 90 - 40 = 50$ ريال سعودي

مزايا وعيوب المدى

مزاياه

- سهولة حسابه
- مقياس يعطي فكرة سريعة عن تشتت البيانات

عيوبه

- لا يدخل في حسابه إلا قراءتين
- يتأثر بالقيم الشاذة.

٢- التباين والانحراف المعياري:

التباين:

التباين لبيانات العينة هو عبارة عن مجموع مربعات انحرافات القيم عن وسطها الحسابي مقسوماً على (عدد هذه القيم مطروح منه واحد) ويرمز له في حالة حسابة للعينة بالرمز (S^2).

الانحراف المعياري:

هو الجذر التربيعي الموجب للتباين ويرمز له في حالة حسابة للعينة بالرمز (S).

حساب التباين والانحراف المعياري:

إذا كانت $x_1, x_2, \ldots, x_n$ تمثل n من بيانات العينة، بمتوسط حسابي ($\bar{X}$)، وكانت هذه المشاهدات تعبر عن عينة مأخوذة من مجتمع الدراسة، فإن التباين والانحراف المعياري لهذه العينة يحسبان عن طريق الصيغتين التاليتين على التوالي:

$$S^2 = \frac{\sum x^2 - \frac{(\sum x)^2}{n}}{n-1}$$

والانحراف المعياري:

$$S = \sqrt{S^2}$$

مثال:

احسب الانحراف المعياري للأجور اليومية بالدولار للعينة التالية المكونة من خمس عمال بإحدى القطاعات:

60 90 80 70 50

الحل:

x	60	90	80	70	50	$\sum x = 350$
x^2	3600	8100	6400	4900	2500	$\sum x^2 = 25500$

$$S^2 = \frac{\sum x^2 - \frac{(\sum x)^2}{n}}{n-1} = \frac{25500 - \frac{(350)^2}{5}}{5-1}$$

$$= \frac{25500 - 24500}{4} = 250$$

$$S = \sqrt{S^2} = \sqrt{250} = 15.81\$$$

مزايا وعيوب الانحراف المعياري

مزاياه

- سهولة حسابه
- تدخل جميع القيم في حسابه ولذلك يعتبر من أدق مقاييس التشتت
- له نفس وحدة القياس للظاهرة محل الدراسة

عيوبه

- لا يمكن حسابه للبيانات الوصفية
- يتأثر بالقيم الشاذة.

العلاقة بين المتوسطات والتشتت

١ـ معامل الاختلاف:

هو معامل نسبي يستخدم للمقارنة بين تشتت ظاهرتين أو أكثر مختلفتين أو حتى متشابهتين في وحدة القياس. والظاهرة التي معامل اختلافها أكبر تكون أكثر تشتتاً من الأخرى. ويرمز له بالرمز $c.v.(x)$ ، ويحسب من خلال:

$$c.v.(x) = \frac{s}{\bar{x}} \times 100\%$$

مثال:

إذا أراد شخص الاستثمار في إحدى الشركتين (A أو B). فأيهما يختار؟ إذا كانت لديه المعلومات التالية:

	العائد على أسهم الشركتين خلال السنوات الخمس الماضية	
	الوسط الحسابي	الانحراف المعياري
الشركة (A)	10	2
الشركة (B)	12	5

الحل:

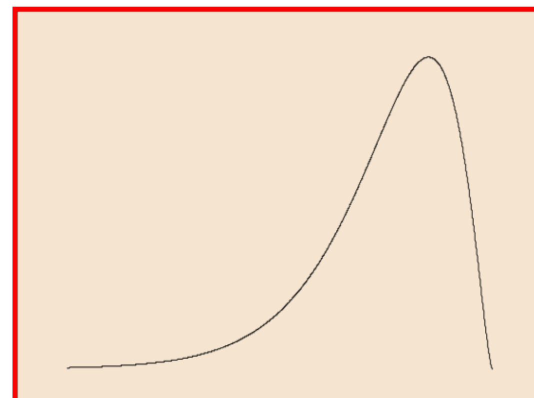
إذا كان اعتماده على الوسط الحسابي فقط فأنه سيختار الاستثمار في الشركة (B). وإذا كان اعتماده على الانحراف المعياري فقط فأنه سيختار الاستثمار في الشركة (A) لتقليل حجم المخاطرة. ولكن للاستثمار الأفضل يفضل الاعتماد على الوسط الحسابي و الانحراف المعياري معاً وذلك بحساب معامل الاختلاف للشركتين كما يلي:

$$c.v.(A)=\frac{2}{10}\times 100=\mathbf{20\%},\qquad c.v.(B)=\frac{5}{12}\times 100=\mathbf{41.67\%}$$

مما سبق يتضح أن العائد المتوقع من سهم الشركة (B) أعلى إلا أنه استثماراً ذا مخاطر أكبر من الاستثمار في الشركة (A). لذا فإن الاستثمار الأفضل في أسهم الشركة (A).

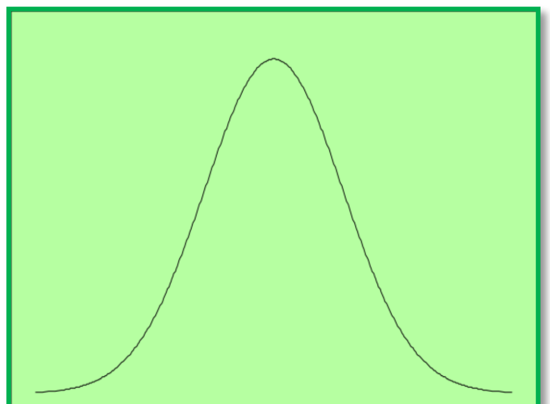
٢ـ معامل الالتواء:

الالتواء: هو درجة بُعد المنحنى التكراري عن التماثل. ويقصد بالتماثل أنه إذا أسقطنا عموداً من قمة المنحنى التكراري وقسمه إلى قسمين منطبقين يكون التوزيع متماثلاً. والعكس فيكون التوزيع غير متماثل أي ملتو إما إلى جهة اليمين أو إلى جهة اليسار. ويوضح ذالك بالشكل التالي:



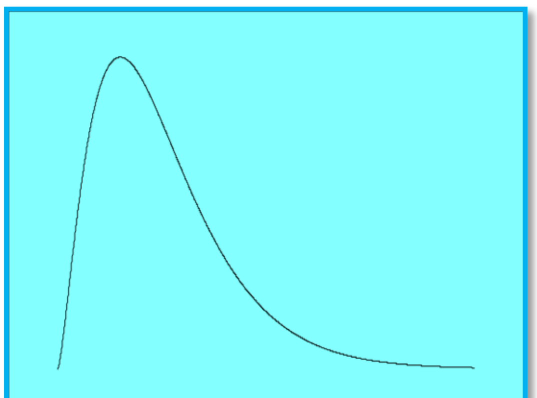
التوزيع غير متماثل
وملتو من جهة اليسار

$$\bar{x} < m < D$$



التوزيع متماثل

$$\bar{x} = m = D$$



التوزيع غير متماثل
وملتو من جهة اليمين

$$\bar{x} > m > D$$

ويمكن حسابه مستخدمين المنوال D أو الوسيط M، كما يلي:

١- معامل الالتواء الأول (يحسب عن طريق المنوال):

$$s.k.(I) = \frac{\bar{x} - D}{s}$$

٢- معامل الالتواء الثاني (يحسب عن طريق الوسيط):

$$s.k.(II) = \frac{3(\bar{x} - m)}{s}$$

مثال:

الجدول التالي يعطي بعض المقاييس الوصفية لمبالغ الاستثمارات (بالمليون ريال) لـ(40) شركة، و المطلوب قياس معامل الالتواء المناسب لهذه البيانات:

الانحراف المعياري	المنوال	الوسط الحسابي
10.43	153	152

الحل:

$$s.k.(I) = \frac{\bar{x} - D}{s} = \frac{152 - 153}{10.43} = -0.096$$

شكل توزيع مبالغ الاستثمارات لهذه الشركات ملتو جهة اليسار.

مثال:

الجدول التالي يوضح بعض المقاييس الوصفية للمصروفات(بالمليون ريال) لـ(50) شركة، والمطلوب دراسة تماثل توزيع المصروفات لهذه الشركات:

الانحراف المعياري	الوسيط	الوسط الحسابي
8.27	62.67	65.52

الحل:

$$s.k.(II)=\frac{3(\bar{x}-m)}{s}=\frac{3(65.52-62.67)}{8.27}=1.03$$

شكل التوزيع موجب الالتواء فهو ملتو جهة اليمين